

Modelli di rumore di dispositivi elettronici a semiconduttore

*Original*

Modelli di rumore di dispositivi elettronici a semiconduttore / Bonani, Fabrizio. - (1992). [10.6092/polito/porto/2501525]

*Availability:*

This version is available at: 11583/2501525 since:

*Publisher:*

Politecnico di Torino

*Published*

DOI:10.6092/polito/porto/2501525

*Terms of use:*

Altro tipo di accesso

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

*Publisher copyright*

(Article begins on next page)

POLITECNICO DI TORINO

Facoltà di Ingegneria  
Corso di Dottorato in Ingegneria Elettronica

Tesi di Dottorato

**Modelli di rumore  
di dispositivi elettronici  
a semiconduttore**

Fabrizio Bonani

VIII Ciclo

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Generalità sul rumore nei dispositivi elettronici</b>	<b>3</b>
2.1	Introduzione	3
2.2	Il rumore nei dispositivi	3
2.3	La Master Equation	5
2.3.1	Rumore GR in una variabile	9
2.3.2	Rumore GR in sistemi a più livelli	10
2.3.3	Fluttuazioni di velocità	11
2.4	Il formalismo di Langevin	11
2.4.1	Sorgenti microscopiche di rumore GR	12
2.4.2	Sorgenti microscopiche di rumore di diffusione	13
2.4.3	Sorgenti microscopiche di rumore $1/f$	16
2.5	Caratterizzazione di $n$ -porte rumorosi	19
2.6	Il Metodo del Campo di Impedenza	21
2.6.1	La tecnica di funzione di Green	22
2.6.2	L'analisi di rumore	23
<b>3</b>	<b>La simulazione di rumore nei dispositivi elettronici</b>	<b>29</b>
3.1	Introduzione	29
3.2	I modelli fisici di rumore	29
3.3	Il metodo numerico	32
3.4	Implementazione nel simulatore PADRE	39
3.4.1	Transizioni dirette	41
3.4.2	Transizioni Auger	43
3.4.3	Transizioni da ionizzazione per urto	45
3.4.4	Transizioni Shockley Read Hall di volume	46
3.4.5	Transizioni Shockley Read Hall superficiali	49

<b>4</b>	<b>Analisi dei risultati</b>	<b>51</b>
4.1	Introduzione	51
4.2	Il campione uniformemente drogato	51
4.3	Il diodo $p^+pp^+$ 1D	60
4.4	Il diodo pn 1D	70
4.5	Il diodo pn 2D	84
4.6	Il due-porte resistivo	95
4.7	Il MESFET	105
4.8	Conclusione	110
<b>A</b>	<b>Richiami di teoria delle probabilità</b>	<b>111</b>
A.1	Variabili e processi casuali	111
A.1.1	Valori medi	112
A.1.2	Funzioni di correlazione	112
A.1.3	Spettri di potenza e correlazione	115
A.2	Processi di Poisson	116
A.3	Processi casuali e sistemi lineari	117
A.3.1	Sistemi ingresso-uscita	118
A.3.2	Sistemi a due ingressi e una uscita	119
A.3.3	Sistemi a più ingressi e due uscite	120

## 1

## Introduzione

Negli ultimi anni lo sviluppo della microelettronica ha consentito di realizzare dispositivi sempre più piccoli e veloci, sia per applicazioni analogiche che digitali. Ciò ha richiesto una continua diminuzione delle tensioni applicate al dispositivo stesso, allo scopo di non aumentare in modo eccessivo i campi elettrici al suo interno, e quindi anche dei margini di rumore sui livelli logici che tali tensioni sono in grado di sostenere. Il risultato di tutte queste considerazioni è che le fluttuazioni (cioè il rumore) introdotte nelle grandezze elettriche macroscopiche a causa della aleatorietà del fenomeno del trasporto dei portatori all'interno dei materiali a semiconduttore assumono una importanza crescente nelle applicazioni, siano esse analogiche, digitali o *mixed mode*.

Lo studio delle fluttuazioni è, dal punto di vista della fisica dei processi microscopici coinvolti, un problema che si può ritenere sostanzialmente risolto<sup>1</sup>, quantomeno nella ipotesi dell'approssimazione semiclassica per il trasporto dei portatori, mentre gli effetti che queste *sorgenti microscopiche di rumore* hanno sulle caratteristiche elettriche esterne del dispositivo sono ancora argomento di ricerca attiva. In particolare, dal punto di vista del componente elettronico la metodologia che consente di collegare le sorgenti microscopiche e la rappresentazione elettrica del rumore si basa su una tecnica di funzione di Green detta *metodo del campo di impedenza*. Essa è di facile implementazione nel caso di dispositivi che lavorino in condizione di regime stazionario<sup>2</sup> (come gli amplificatori), mentre il caso del regime di ampio segnale quasi-periodico (come nei mixer e negli oscillatori) è un problema

<sup>1</sup>Con l'unica eccezione dell'origine del rumore  $1/f$ .

<sup>2</sup>Sebbene il suo peso computazionale sia tutt'altro che trascurabile.

ancora aperto.

Questo lavoro è suddiviso sostanzialmente in due parti: nella prima vengono ricavate le espressioni dello spettro delle sorgenti microscopiche di rumore a partire dall'applicazione microscopica della meccanica statistica alle transizioni elementari responsabili delle fluttuazioni stesse, e viene introdotta in modo generale la tecnica di funzione di Green effettuando la connessione con il classico metodo del campo di impedenza introdotto da Shockley (Cap. 2). Nella seconda parte, si prende in considerazione il caso di un generico dispositivo a semiconduttore e si sviluppa una tecnica numerica in grado di valutare in modo efficiente la funzione di Green nel caso di un componente elettronico che lavori in condizione di regime stazionario e che sia descritto da un modello a equazioni differenziali a derivate parziali. Tale metodo numerico è stato implementato, per il caso del modello di trasporto *drift-diffusion*, nell'ambito del simulatore "general purpose" PADRE degli AT&T Bell Laboratories di Murray Hill, New Jersey, che è in grado di analizzare le caratteristiche elettriche di un generico dispositivo a omo- e eterostruttura avente un numero di contatti arbitrario (Cap. 3).

Il Cap. 4, infine, è dedicato alla presentazione dei risultati ottenuti dalla simulazione delle proprietà di rumore di diversi dispositivi elettronici a semiconduttore, confrontandoli con risultati teorici e con altri modelli.

Prima di terminare questa Introduzione, vorrei ringraziare Mark R. Pinto e R. Kent Smith dello ULSI Technology Research Department degli AT&T Bell Laboratories per avermi permesso di lavorare con loro sullo sviluppo e la implementazione del metodo del campo di impedenza nel simulatore PADRE, Patrice Houlet del Centre d'Electronique della Université Montpellier II per aver fornito i risultati delle simulazioni con lo Scattered Packet Method e E. Starikov del Semiconductor Physics Institute di Vilnius, Lituania, per aver reso disponibili i risultati delle sue simulazioni con un modello di trasporto idrodinamico. Un particolare ringraziamento va anche a Carlo U. Naldi del Politecnico di Torino per il suo continuo incoraggiamento durante lo sviluppo di questo lavoro.

Infine, vorrei ringraziare il mio tutore durante il corso di Dottorato, Giovanni Ghione del Dipartimento di Elettronica del Politecnico di Torino, senza il quale non mi sarei mai avvicinato al campo della simulazione fisica di rumore.



## 2

## Generalità sul rumore nei dispositivi elettronici

### 2.1 Introduzione

Questo capitolo costituisce una introduzione generale sia alle sorgenti microscopiche di rumore che alle tecniche utilizzate per caratterizzare da un punto di vista circuitale le proprietà di rumore di un dispositivo elettronico a semiconduttore a  $N + 1$  terminali. In particolare, §2.2 fornisce una descrizione generale del rumore nei dispositivi, introducendo euristicamente le sorgenti microscopiche di rumore poi studiate in dettaglio sia con la tecnica della Master Equation (§2.3) che con il formalismo di Langevin (§2.4). Quest'ultimo rappresenta la metodologia utilizzata in tutti i modelli di rumore di dispositivi basati su una descrizione con equazioni differenziali alle derivate parziali. §2.5 descrive la caratterizzazione circuitale di  $n$ -porte rumorosi, mentre §2.6 introduce il metodo del campo di impedenza, ovvero il formalismo che consente di porre in relazione le sorgenti microscopiche di rumore (nel formalismo di Langevin) con la matrice di correlazione dei generatori equivalenti di rumore collegati alle porte del dispositivo stesso.

### 2.2 Il rumore nei dispositivi

Tutti i sistemi fisici, e quindi anche i dispositivi elettronici, sono caratterizzabili da grandezze macroscopiche (che rappresentano la traduzione a un livello termodinamico delle variabili dinamiche microscopiche, oggetto di studio

della meccanica statistica quantistica) costituite da una componente *deterministica* (il valore medio) e da una componente *stocastica* (a valor medio nullo) che ne rappresenta le *fluttuazioni*, cioè il *rumore*<sup>1</sup>. Tali fluttuazioni, descritte nel formalismo della *Master Equation* (ME) [1], sono la rappresentazione macroscopica del gran numero di gradi di libertà presenti al livello microscopico.

Nei materiali e nei dispositivi a semiconduttore, i meccanismi microscopici di rumore che possono essere descritti esattamente nel formalismo della ME sono il *rumore di generazione e ricombinazione* (GR) e il *rumore di diffusione*. Il primo corrisponde alle fluttuazioni nella popolazione dei vari stati quantici causate dalle transizioni interbanda, siano esse dirette o mediate da stati localizzati, che sono legate a interazioni con fononi, con impurità droganti ionizzate e alla presenza di centri di ricombinazione, eventualmente descritti dalla teoria di Shockley, Read e Hall (SRH). Il rumore di diffusione, invece, corrisponde alle *fluttuazioni di velocità* dovute ai fenomeni di scattering intrabanda causati dalle interazioni con fononi.

L'analisi di rumore può essere effettuata secondo due punti di vista: quello macroscopico, che a sua volta può essere basato sul formalismo della Master Equation o su quello di Langevin, e quello microscopico [1]. Da un punto di vista gerarchico, in ordine di complessità decrescente, si parte dall'analisi microscopica basata sull'equazione di Von Neumann che descrive la dinamica dell'operatore densità  $\rho(t)$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{j\hbar} [\rho, H] = 0 \quad (2.1)$$

dove  $H$  è l'hamiltoniana del sistema e  $[\cdot, \cdot]$  rappresenta l'operatore di commutazione. Si noti che la soluzione di questa equazione è, nel caso generale, estremamente complessa: infatti, la conduzione in un semiconduttore è un fenomeno che richiede una descrizione che tenga conto anche dell'interazione elettrone-elettrone (problema *many-body*). Una possibile tecnica di analisi consiste nel fare un insieme di approssimazioni che riducono la (2.1) a una Master Equation che descrive la dinamica della parte diagonale dell'operatore densità ridotto  $P(\gamma, t)$ , essendo  $\gamma$  un indice che descrive lo stato quantico in esame (si veda [1] e i riferimenti ivi contenuti).

<sup>1</sup>Per una introduzione alle principali grandezze utilizzate nell'analisi di rumore si veda l'App.A

Una semplificazione a questo approccio, rigoroso da un punto di vista fisico, ma difficilmente utilizzabile nell'analisi delle proprietà di rumore dei dispositivi elettronici, consiste nel partire direttamente dall'equazione di Boltzmann semiclassica<sup>2</sup>, che descrive l'evoluzione spatio-temporale della funzione di distribuzione  $f(\underline{r}, \underline{k}, t)$ :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{r}} - \frac{q}{\hbar} \underline{E} \cdot \nabla_{\underline{k}} \right] f(\underline{r}, \underline{k}, t) = I(f(\underline{r}, \underline{k}, t)) \quad (2.2)$$

dove  $\underline{v} = d\underline{r}/dt$ ,  $\underline{k}$  è il vettore d'onda,  $\underline{E}$  è il campo elettrico e  $I(\cdot)$  è l'integrale di collisione, e aggiungervi un termine forzante stocastico a valor medio nullo  $\xi(\underline{r}, \underline{k}, t)$  [1]. Purtroppo, anche questa metodologia può essere, in pratica, utilizzata solo per considerazioni teoriche in situazioni molto semplificate e particolari (come, ad esempio, un materiale omogeneo e indefinito).

Allo scopo di poter analizzare le proprietà di rumore di un dispositivo elettronico, allora, occorre abbandonare la descrizione microscopica per passare a una *macroscopica*, basata su una procedura di *coarse graining* dello spazio delle fasi (oppure, in termini quantistici, sulla descrizione collettiva di un insieme di stati quantici diversi). I metodi di analisi macroscopici sono sostanzialmente due, di cui il primo è quello basato sulla Master Equation, mentre il secondo (l'approccio di Langevin) può essere ricavato direttamente da quest'ultima. Come si vedrà, da un punto di vista rigoroso l'approccio di Langevin richiede l'uso di sorgenti microscopiche di rumore bianche, e quindi le estensioni spesso effettuate a sorgenti del tipo  $1/f$  sono da considerarsi puramente fenomenologiche.

## 2.3 La Master Equation

L'idea su cui è basata la Master Equation risale direttamente a Boltzmann, che l'ha introdotta per primo. Ogni sistema fisico<sup>3</sup> è descritto da un gran numero di equazioni microscopiche, di cui non è possibile determinare la soluzione esatta. Lo stesso sistema, però, presenta alcune grandezze medie la cui dinamica è determinata da leggi molto più semplici di quelle microscopiche. In altri termini, è possibile ricavare una certa quantità di informazione sul sistema stesso (ovviamente non l'informazione completa, ottenibile solo dalla

<sup>2</sup>Con il termine "semiclassica" si intende l'ipotesi di poter definire una *traiettoria* delle particelle.

<sup>3</sup>Per semplicità, si considera un sistema classico.

descrizione microscopica) eliminando le variabili dalla dinamica più rapida mediante una opportuna media temporale, e riducendo così la descrizione a equazioni differenziali che descrivano l'evoluzione delle variabili a dinamica più lenta [2]. Naturalmente, questa descrizione è approssimata: in realtà, ci sono piccole variazioni che costituiscono le *fluttuazioni* cui il sistema è sottoposto. Esse non possono essere determinate esattamente<sup>4</sup>, ma vengono descritte come processi stocastici le cui proprietà statistiche sono a loro volta determinate da equazioni relativamente semplici rispetto a quelle microscopiche. Questo approccio dinamico viene detto *mesoscopico*, e la procedura di media temporale che lo determina viene detta *coarse graining* [2].

Sia  $\underline{a}$  un vettore di variabili casuali mesoscopiche, cioè tali da essere il risultato del coarse graining dello spazio delle fasi microscopico [2, 3, 4]. La probabilità condizionata  $P(\underline{a}, t'' + \Delta t \mid \underline{a}', 0)$  deve soddisfare l'equazione di Smoluchowski o Chapman-Kolmogorov [1, 5]:

$$\begin{aligned} P(\underline{a}, t'' + \Delta t \mid \underline{a}', 0) &= \int P(\underline{a}, t'' + \Delta t \mid \underline{a}'', t'') P(\underline{a}'', t'' \mid \underline{a}', 0) d\underline{a}'' = \\ &= \int P(\underline{a}, \Delta t \mid \underline{a}'', 0) P(\underline{a}'', t'' \mid \underline{a}', 0) d\underline{a}'' \end{aligned} \quad (2.3)$$

dove la seconda uguaglianza dipende dal fatto che  $\underline{a}$  è una collezione di processi casuali stazionari. Questa equazione può essere facilmente trasformata nella seguente Master Equation [1]:

$$\frac{\partial P(\underline{a}, t \mid \underline{a}', 0)}{\partial t} = \int \left\{ P(\underline{a}'', t \mid \underline{a}', 0) W_{\underline{a}'' \underline{a}} - P(\underline{a}, t \mid \underline{a}', 0) W_{\underline{a} \underline{a}''} \right\} d\underline{a}'' \quad (2.4)$$

dove si è assunta l'ipotesi:

$$P(\underline{a}, \Delta t \mid \underline{a}', 0) = W_{\underline{a}' \underline{a}} \Delta t + \delta_{\underline{a}' \underline{a}} \left[ 1 - \sum_{\underline{a}''} W_{\underline{a} \underline{a}''} \Delta t \right], \quad (2.5)$$

essendo:

- $W_{\underline{a}'' \underline{a}}$  la probabilità per unità di tempo della transizione  $\underline{a}'' \rightarrow \underline{a}$ ;
- $\delta$  il simbolo di Kronecker;
- $\sum_{\underline{a}''}$  una sommatoria estesa a tutti gli  $\underline{a}''$  escluso  $\underline{a}$ .

<sup>4</sup>Ciò richiederebbe la soluzione del modello microscopico.

La Master Equation (2.4) può essere espressa come serie infinita introducendo i relativi *momenti di Fokker-Planck*. Seguendo la procedura descritta in [1], si arriva a scrivere la Master Equation nella sua *espansione di Kramers-Moyal*:

$$\frac{\partial P(\underline{a}, t | \underline{a}', 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial \underline{a}} \right)^n : \mathcal{F}_n(\underline{a}) P(\underline{a}, t | \underline{a}', 0) \quad (2.6)$$

dove  $\mathcal{F}_n$  è un tensore di rango  $n$  che rappresenta il *momento di Fokker-Planck* di ordine  $n$ , e l'operatore ":" indica:

$$\underline{x}^n : \underline{y}^n = \left( \sum_i x_i y_i \right)^n. \quad (2.7)$$

Il momento di Fokker-Planck di ordine  $n$  è definito da:

$$\mathcal{F}_n(\underline{a}) = \int (\underline{a}' - \underline{a})^n W_{\underline{a}\underline{a}'} d\underline{a}' \quad (2.8)$$

ovvero, per definizione di  $W_{\underline{a}\underline{a}'}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(\underline{a}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (\underline{a}' - \underline{a})^n P(\underline{a}', \Delta t | \underline{a}, 0) d\underline{a}' = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle [\underline{a}(\Delta t) - \underline{a}(0)]^n \rangle_{\underline{a}(0)}}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

dove  $\langle \cdot \rangle_{\underline{a}(0)}$  indica una media su un sottoinsieme corrispondente alla condizione iniziale  $\underline{a}(t=0) = \underline{a}(0)$ .

L'espansione di Kramers-Moyal (2.6) è, nel caso generale, una equazione differenziale di ordine infinito, ma molto spesso è possibile approssimare il secondo membro ai soli primi due termini (cioè, i primi due momenti di Fokker-Planck). In questo caso, la (2.6) si semplifica in:

$$\frac{\partial P(\underline{a}, t | \underline{a}', 0)}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial a_i} \{ A_i(\underline{a}) P \} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \{ B_{ij}(\underline{a}) P \}, \quad (2.10)$$

dove  $A(\underline{a})$  e  $B(\underline{a})$  sono i primi due momenti di Fokker-Planck.

Introducendo formalmente la trasformata di Laplace della probabilità condizionata:

$$\psi(\underline{s}, t) = \int P(\underline{a}, t | \underline{a}', 0) e^{-\underline{s} \cdot \underline{a}} d\underline{a} \quad (2.11)$$

e trasformando secondo Laplace la (2.6) si ottiene la seguente espressione della ME:

$$\frac{\partial \psi(\underline{s}, t)}{\partial t} = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \underline{s}^n : \mathcal{F}_n(\underline{a}) P(\underline{a}, t | \underline{a}', 0) e^{-\underline{s} \cdot \underline{a}} d\underline{a} \quad (2.12)$$

che può essere interpretata come equazione descrittiva dell'evoluzione temporale delle medie condizionate:

$$\frac{\partial \langle e^{-\underline{s} \cdot \underline{a}(t)} \rangle_{\underline{a}'} }{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle e^{-\underline{s} \cdot \underline{a}(t)} \frac{(-1)^n}{n!} \underline{s}^n : \mathcal{F}_n(\underline{a}(t)) \right\rangle_{\underline{a}'} \quad (2.13)$$

dalla quale si ricavano le seguenti due equazioni fenomenologiche del primo e del secondo ordine [1]:

$$\frac{\partial \langle \underline{a}(t) \rangle_{\underline{a}'}}{\partial t} = \langle A(\underline{a}(t)) \rangle_{\underline{a}'}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \langle \underline{a}(t) \underline{a}^T(t) \rangle_{\underline{a}'}}{\partial t} = \langle \underline{a}(t) A^T(\underline{a}(t)) \rangle_{\underline{a}'} + \langle A(\underline{a}(t)) \underline{a}^T(t) \rangle_{\underline{a}'} + \langle B(\underline{a}(t)) \rangle_{\underline{a}'}, \quad (2.15)$$

avendo indicato con  $\underline{x}^T$  il trasposto di  $\underline{x}$ .

La (2.14) è un'equazione fenomenologica che descrive la dinamica della risposta media  $\langle \underline{a}(t) \rangle_{\underline{a}'}$  condizionata da un disturbo imposto dallo stato iniziale  $\underline{a}'$ . Essa può essere linearizzata sviluppando in serie il secondo membro:

$$A(\underline{a}(t)) = A(\underline{a}^0) - \underline{M} \cdot \Delta \underline{a}(t) + O((\Delta \underline{a})^2), \quad (2.16)$$

essendo  $\underline{M}$  il *tensore fenomenologico di rilassamento* definito da:

$$M_{ij} = - \left. \frac{\partial A_i}{\partial a_j} \right|_{\underline{a}^0}, \quad (2.17)$$

e  $\Delta \underline{a}(t) = \underline{a}(t) - \underline{a}^0$ .

Per un processo stazionario, la soluzione di regime è tale che  $A(\underline{a}^0) = 0$ , e quindi la (2.14) si riduce a:

$$\frac{\partial \langle \Delta \underline{a}(t) \rangle_{\underline{a}'}}{\partial t} = - \underline{M} \cdot \langle \Delta \underline{a}(t) \rangle_{\underline{a}'}. \quad (2.18)$$

In modo del tutto analogo, anche la (2.15) può essere sviluppata in serie. Ponendosi in condizioni di regime stazionario, ciò conduce al *teorema del secondo momento generalizzato* (noto anche con i nomi di *relazione di Einstein generalizzata*, *teorema GR generalizzato* e *teorema A* [1]):

$$\langle \Delta \underline{a}(t) \Delta \underline{a}^T(t) \rangle_{\underline{a}'} \cdot \underline{M}^T + \underline{M} \cdot \langle \Delta \underline{a}(t) \Delta \underline{a}^T(t) \rangle_{\underline{a}'} = B(\underline{a}^0) \quad (2.19)$$

che, in equilibrio termodinamico, si può dimostrare essere pari a:

$$\langle \Delta \underline{a}(t) \Delta \underline{a}^T(t) \rangle_{\underline{a}'} = \frac{1}{2} \underline{M}^{-1} \cdot \underline{B}(\underline{a}^0). \quad (2.20)$$

Il seguito di questa sezione contiene alcuni esempi di applicazione del formalismo della Master Equation di complessità crescente e relativi alle sorgenti microscopiche di rumore nei dispositivi a semiconduttore.

### 2.3.1 Rumore GR in una variabile

Si consideri un sistema definito da una sola variabile stocastica discreta  $a = n$ , essendo  $n$  la popolazione del livello energetico in esame. La Master Equation (2.4), allora, assume la forma:

$$\frac{\partial P(n, t | m, 0)}{\partial t} = \sum_k' \{ P(k, t | m, 0) W_{k,n} - P(n, t | m, 0) W_{n,k} \} \quad (2.21)$$

dove  $\sum'$  è estesa a tutti i  $k \neq n$ . Nell'ipotesi di poter trascurare le transizioni che richiedano lo scambio di più di una particella, si ha che  $W_{k,n}$  è nullo per  $k \neq n \pm 1$ , e quindi la (2.21) si scrive:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(n, t | m, 0)}{\partial t} &= P(n-1, t | m, 0) W_{n-1,n} + P(n+1, t | m, 0) W_{n+1,n} + \\ &- P(n, t | m, 0) [W_{n,n-1} + W_{n,n+1}]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Introducendo esplicitamente le probabilità di generazione e ricombinazione per unità di tempo:

$$g(n) = W_{n,n+1} \quad (2.23)$$

$$r(n) = W_{n,n-1} \quad (2.24)$$

l'equazione (2.22) assume la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(n, t | m, 0)}{\partial t} &= P(n-1, t | m, 0) g(n-1) + P(n+1, t | m, 0) r(n+1) + \\ &- P(n, t | m, 0) [g(n) + r(n)] \end{aligned} \quad (2.25)$$

ovvero, in condizioni stazionarie (per cui  $\partial/\partial t = 0$  e  $P = P_0$ ):

$$P_0(n-1)g(n-1) + P_0(n+1)r(n+1) = P_0(n)[g(n) + r(n)], \quad (2.26)$$

che ha per soluzione [6]:

$$P_0(n) = P_0(0) \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} g(\nu)}{\prod_{\nu=0}^n r(\nu)}. \quad (2.27)$$

### 2.3.2 Rumore GR in sistemi a più livelli

Si consideri, ora, un sistema fisico avente  $s+1$  livelli energetici  $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{s+1}$ . Ad esempio,  $\mathcal{E}_1$  sia la banda di conduzione di un semiconduttore e  $\mathcal{E}_{s+1}$  ne sia la banda di valenza. Per la conservazione della carica, le particelle devono soddisfare il vincolo:

$$N - P + \sum_{i=2}^s N_i = \sum_{i=1}^{s+1} N_i = \text{cost}, \quad (2.28)$$

essendo  $N_i$  il numero di particelle che occupano il livello  $\mathcal{E}_i$ ; ciò significa che delle  $s+1$  popolazioni, solo  $s$  sono tra loro indipendenti. Per simmetria, comunque, si mantengono nella notazione tutte le popolazioni:  $\underline{a} = \{N_1, \dots, N_{s+1}\}^T$ . Si può dimostrare [7] che:

$$W_{\underline{a}, \underline{a}'} = \begin{cases} P_{ij}(N_1, \dots, N_{s+1}) & \text{se } \begin{cases} \underline{a}' = \{N_1, \dots, N_i, \dots, N_j, \dots, N_{s+1}\}^T \\ \underline{a} = \{N_1, \dots, N_i - 1, \dots, N_j + 1, \dots, N_{s+1}\}^T \end{cases} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.29)$$

essendo  $P_{ij}$  la probabilità di transizione per unità di tempo da  $\mathcal{E}_i$  a  $\mathcal{E}_j$ . A questo punto, è possibile valutare i primi due momenti di Fokker-Planck definiti dalla (2.8):

$$A_i(N_1, \dots, N_{s+1}) = \sum_{j=1}^{s+1}' [P_{ji}(N_1, \dots, N_{s+1}) - P_{ij}(N_1, \dots, N_{s+1})], \quad (2.30)$$

$$B_{ii}(N_1, \dots, N_{s+1}) = 2 \sum_{j=1}^{s+1}' P_{ij}(N_1, \dots, N_{s+1}), \quad (2.31)$$

$$B_{ij}(N_1, \dots, N_{s+1}) = -P_{ij}(N_1, \dots, N_{s+1}) - P_{ji}(N_1, \dots, N_{s+1}). \quad (2.32)$$

Il corrispondente *tensore di rilassamento*  $\underline{M}$  è definito dalla (2.17):

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{s+1}' \left[ \frac{\partial P_{ik}}{\partial N_j} - \frac{\partial P_{ki}}{\partial N_j} \right] \Big|_{(N_1^0, \dots, N_{s+1}^0)}, \quad (2.33)$$

che può, quindi, essere usato nella descrizione fenomenologica delle fluttuazioni delle variabili di stato mesoscopiche (2.18).

### 2.3.3 Fluttuazioni di velocità

Le fluttuazioni di velocità, cui corrisponde il cosiddetto *rumore di diffusione*, sono dovute alle transizioni intrabanda legate allo scattering dei portatori da parte delle aperiodicità del reticolo cristallino. Il modello comunemente utilizzato per il loro studio è quello del *random walk*, inizialmente sviluppato per l'analisi del moto browniano [5, 8, 9]. In particolare, si scrivono le equazioni fenomenologiche nelle variabili markoviane<sup>5</sup>  $v$  e  $x$ :

$$\frac{d\langle v \rangle}{dt} = -\frac{\langle v \rangle}{\tau_c} \quad (2.34)$$

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \langle v \rangle, \quad (2.35)$$

dove  $\tau_c$  è il tempo medio tra due urti, cui corrispondono i momenti di Fokker-Planck:

$$A_1 = -\frac{v}{\tau_c}, \quad A_2 = 0, \quad (2.36)$$

$$B_{11} = \frac{2kT}{m^* \tau_c}, \quad B_{12} = B_{21} = B_{22} = 0 \quad (2.37)$$

essendo  $k$  la costante di Boltzmann e  $m^*$  la massa efficace dei portatori. Per una descrizione più dettagliata, si veda [1].

## 2.4 Il formalismo di Langevin

La descrizione macroscopica delle fluttuazioni delle variabili mesoscopiche che descrivono un sistema fisico può essere effettuata, come anticipato in § 2.2, seguendo due metodologie: quella relativa alla Master Equation, descritta in § 2.3, e il *formalismo di Langevin*, strettamente legato alla ME stessa. Il metodo di Langevin, sebbene gerarchicamente subordinato alla Master Equation, è stato sviluppato per primo nell'ambito dello studio del moto browniano. Attualmente, si dà il nome di *equazione di Langevin* a tutte le equazioni differenziali a termine forzante stocastico derivate dall'approssimazione della Master Equation al primo momento di Fokker-Planck (2.14), eventualmente linearizzata nell'equazione fenomenologica (2.18).

<sup>5</sup>Per semplicità, si considera il caso monodimensionale.

In pratica, si scrivono le equazioni (2.14) e (2.18) omettendo le medie condizionate e aggiungendo un termine forzante stocastico, detto *sorgente di Langevin* o *sorgente microscopica di rumore* [1, 10]:

$$\frac{\partial \underline{a}(t)}{\partial t} = \underline{A}(\underline{a}(t)) + \underline{\xi}(t), \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \underline{\Delta a}(t)}{\partial t} = -\underline{M} \cdot \underline{\Delta a}(t) + \underline{\xi}(t). \quad (2.39)$$

Allo scopo di garantire la consistenza con le equazioni (2.14) e (2.18), la sorgente stocastica  $\underline{\xi}$  deve essere tale che  $\langle \underline{\xi}(t) \rangle_{\underline{a}} = 0$  per ogni  $t$ . Inoltre, la sorgente  $\underline{\xi}(t)$  non deve dipendere dal suo valore iniziale  $\underline{\xi}(0)$  qualunque sia  $t$ , cioè il suo spettro di potenza deve essere bianco [1]:

$$\underline{R}_{\underline{\xi}, \underline{\xi}}(\tau) = \underline{\Xi} \delta(\tau) \iff \underline{S}_{\underline{\xi}, \underline{\xi}} = 2\underline{\Xi}. \quad (2.40)$$

La connessione con la Master Equation può, ora, essere ricavata integrando la (2.39) su un intervallo di tempo  $\Delta t$ :

$$\underline{\Delta a}(\Delta t) - \underline{a}(0) = \underline{a}(\Delta t) - \underline{a}(0) = -\underline{M} \cdot \underline{\Delta a}(t_0) \Delta t + \int_0^{\Delta t} \underline{\xi}(t) dt + O(\Delta t^2), \quad (2.41)$$

essendo  $t_0$  un istante compreso tra 0 e  $\Delta t$ , moltiplicandola per la sua trasposta e prendendone la media condizionata. Si dimostra, così, che vale la relazione fondamentale [11]:

$$\underline{S}_{\underline{\xi}, \underline{\xi}} = 2\underline{\Xi} = 2\underline{B}(\underline{a}^0), \quad (2.42)$$

che pone in relazione diretta lo spettro della sorgente microscopica di rumore e il secondo momento di Fokker-Planck del sistema in esame.

### 2.4.1 Sorgenti microscopiche di rumore GR

Per le transizioni interbanda già descritte in § 2.3.2, l'equazione di Langevin fenomenologica (2.38) si scrive, per un materiale indefinito e omogeneo:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{s+1} [P_{ji}(N_1, \dots, N_{s+1}) - P_{ij}(N_1, \dots, N_{s+1})] + \Gamma_i(t), \quad (2.43)$$

dove  $i = 1, \dots, s+1$ , e  $\Gamma_i$  rappresenta la sorgente microscopica di rumore. Lo spettro di tale sorgente è definito nella (2.42), dove il momento di Fokker-Planck di ordine due è dato dalle (2.31) e (2.32). Si ottiene, così:

$$S_{\Gamma_i, \Gamma_i} = 2B_{ii}(N_1^0, \dots, N_{s+1}^0) = 4 \sum_{j=1}^{s+1} P_{ij}(N_1^0, \dots, N_{s+1}^0), \quad (2.44)$$

$$S_{\Gamma_i, \Gamma_j} = 2B_{ij}(N_1^0, \dots, N_{s+1}^0) = -2P_{ij}(N_1^0, \dots, N_{s+1}^0) - 2P_{ji}(N_1^0, \dots, N_{s+1}^0). \quad (2.45)$$

Si noti che queste equazioni sono scritte scegliendo come variabili di stato l'occupazione dei vari livelli energetici, ovvero il numero  $N_i(t)$  di particelle presenti nello stato  $\mathcal{E}_i$  all'istante  $t$ . Nello studio delle proprietà di rumore dei dispositivi elettronici, invece, a causa della disomogeneità del materiale costituente il dispositivo stesso, è molto più comune usare come variabili le densità spaziali delle popolazioni, ovvero la popolazione per unità di volume  $n_i(\underline{r})$  del livello energetico  $\mathcal{E}_i$ . In questo caso, e nell'ipotesi che le sorgenti microscopiche siano *spazialmente scorrelate* (ovvero che le fluttuazioni causate da fenomeni GR siano scorrelate se avvengono in punti distinti dello spazio reale), le sorgenti di Langevin assumono la forma [1]:

$$S_{n_i, n_j}(\underline{r}, \underline{r}') = 4\delta(\underline{r} - \underline{r}') \sum_{j=1}^{s+1} p_{ij}(n_1^0, \dots, n_{s+1}^0), \quad (2.46)$$

$$S_{n_i, j}(\underline{r}, \underline{r}') = -2\delta(\underline{r} - \underline{r}') [p_{ij}(n_1^0, \dots, n_{s+1}^0) + p_{ji}(n_1^0, \dots, n_{s+1}^0)] \quad (2.47)$$

dove  $p_{ij}(n_1(\underline{r}), \dots, n_{s+1}(\underline{r}))$  è la probabilità di transizione per unità di tempo e di volume dal livello  $\mathcal{E}_i$  al livello  $\mathcal{E}_j$ .

### 2.4.2 Sorgenti microscopiche di rumore di diffusione

Il rumore di diffusione deriva direttamente dalle fluttuazioni di velocità descritte in § 2.3.3 dalle equazioni fenomenologiche (2.34) e (2.35), cui corrisponde il momento di Fokker-Planck di ordine due (2.37). Pertanto, in termini delle variabili markoviane  $v$  e  $x$ , la corrispondente sorgente di Langevin è bianca e ha matrice di correlazione il cui unico elemento non nullo è quello che corrisponde allo spettro di potenza della sorgente posta nell'equazione (2.34), pari a:

$$S_{\xi_1, \xi_1} = 2B_{11} = 4 \frac{kT}{\tau_c m^*} = 4 \frac{D_0}{\tau_c^2}, \quad (2.48)$$

dove  $D_0 = \tau_c kT/m^* = kT\mu_0/q$  è il coefficiente di diffusione in equilibrio termico.

Dall'equazione (2.34) è possibile valutare lo spettro delle fluttuazioni di velocità  $\delta v$ , ottenendo [1]:

$$S_{\delta v, \delta v}(\omega) = 4D'(\omega), \quad (2.49)$$

dove  $D'(\omega)$  è la parte reale del coefficiente di diffusione definito come trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione delle fluttuazioni di velocità [1, 12]:

$$D(\omega) = D'(\omega) + jD''(\omega) = \int_0^\infty R_{\delta v, \delta v}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.50)$$

Da un punto di vista rigoroso, quindi, lo spettro delle fluttuazioni di velocità non è più bianco, sebbene la dipendenza dalla frequenza non sia significativa per frequenze inferiori all'inverso del tempo medio tra due urti  $\tau_c$ :

$$D'(\omega) \approx D_0 \quad \text{per} \quad \omega\tau_c \ll 1. \quad (2.51)$$

Nell'analisi dei semiconduttori, però, la velocità dei portatori non è una variabile molto utilizzata; si preferisce definire la densità di corrente<sup>6</sup>:

$$J(t) = qn^0 v(t), \quad (2.52)$$

essendo  $n^0$  la densità volumica dei portatori, per la quale si ricava facilmente che la sorgente microscopica di rumore corrispondente alle fluttuazioni di velocità (2.49) è data da [1, 10]:

$$S_{\xi, \xi}(\omega) = 4q^2 n^0 \frac{D'(\omega)}{\Delta V}, \quad (2.53)$$

dove  $\Delta V$  è il volume del materiale in esame.

Per un materiale non omogeneo, poi, la densità di corrente non è più costante nel materiale, ma si assume che le sorgenti microscopiche di rumore siano ancora definite dalla stessa espressione ricavata per il materiale omogeneo indefinito. Sempre nell'ipotesi di sorgenti microscopiche di rumore spazialmente scorrelate (che vale rigorosamente solo se si può supporre trascurabile il cammino libero medio), si ottiene che:

$$S_{\xi, \xi}(\underline{r}, \underline{r}'; \omega) = 4q^2 n^0(\underline{r}) D'(\omega) \delta(\underline{r} - \underline{r}'). \quad (2.54)$$

Questo risultato può essere generalizzato al caso multidimensionale (cioè al caso in cui la densità di corrente sia un vettore  $\underline{J}(\underline{r})$ ), ottenendo [1, 10]:

$$\underline{S}_{\xi, \xi}(\underline{r}, \underline{r}'; \omega) = 2n^0(\underline{r}) [\underline{D}(\omega) + \underline{D}^\dagger(\omega)] \delta(\underline{r} - \underline{r}'), \quad (2.55)$$

<sup>6</sup>In questo paragrafo, si scriveranno tutte le equazioni nell'ipotesi di trattare un gas di elettroni, poiché l'estensione al caso delle lacune è immediata.

dove  $\dagger$  indica il coniugato hermitiano. Anche in questo caso il coefficiente di diffusione viene definito in termini di trasformata di Fourier delle fluttuazioni di velocità, con una estensione al caso multidimensionale della (2.50). Il coefficiente di diffusione che si introduce nell'equazione di continuità, invece, è definito in termini di valor quadratico medio dello "spreading" spazio-temporale di un pacchetto di cariche in moto nel materiale:

$$2t\underline{D}_S(t) = \langle \delta \underline{r}_i(t) \delta \underline{r}_i(t) \rangle \quad (2.56)$$

dove, se  $\underline{r}_i(t)$  è la posizione di una di tali cariche, si definisce la fluttuazione della posizione della carica  $i$ -esima secondo:

$$\delta \underline{r}_i(t) = \underline{r}_i(t) - \langle \underline{r}_i(t) \rangle. \quad (2.57)$$

Si può dimostrare [10, 12] che, anche fuori equilibrio termico, ma nell'ipotesi di poter trascurare l'interazione portatore-portatore, vale la relazione:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{D}(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{D}_S(t) \quad (2.58)$$

dove, in pratica, le operazioni di limite possono essere considerate sostituibili dalle condizioni  $t \gg \tau_c$  e  $\omega \tau_c \ll 1$ . Essendo  $\tau_c$  dell'ordine del picosecondo, la sorgente microscopica di rumore di diffusione può essere considerata bianca per frequenze inferiori a circa 100 GHz.

Si noti inoltre che, fuori dall'equilibrio termico, vale la relazione di Einstein generalizzata [10]:

$$\frac{kT_{n,\alpha\beta}}{q} = \frac{qn^0(\underline{r})D'_{\alpha\beta}(\underline{r},\omega)}{\text{Re}\{\sigma'_{\alpha\beta}(\underline{r}',\omega)\}}, \quad (2.59)$$

dove  $\underline{g}'$  è la conducibilità di piccolo segnale del materiale e  $T_n$  è la temperatura di rumore, definita estendendo la relazione di Nyquist per il rumore termico di un mono-porta come descritto in [10]. Si può dimostrare che la temperatura di rumore coincide con la temperatura dei portatori (definita a partire dall'energia media dei portatori stessi) solo se la funzione di distribuzione è una funzione di Maxwell-Boltzmann traslata, ipotesi che non si verifica mai nel trasporto di portatori caldi [13].

Per un campo elettrico costante, la conducibilità di piccolo segnale è data da:

$$\underline{\sigma} = qn\underline{\mu}' \quad (2.60)$$

essendo  $\underline{\mu}'$  la mobilità *differenziale* del materiale. Pertanto, la (2.59) si riduce a:

$$\frac{kT_{n,\alpha\beta}}{q} = \frac{D'_{\alpha\beta}(\underline{r},\omega)}{\text{Re}\{\mu'_{\alpha\beta}(\underline{r},\omega)\}}. \quad (2.61)$$

Una analoga relazione deve essere implementata anche nei modelli di rumore basati sulla descrizione drift-diffusion del trasporto nel semiconduttore. Infatti, nella discretizzazione dell'equazione di continuità si fa uso dello schema di Scharfetter e Gummel [14], che si basa sull'assunzione della relazione di Einstein anche fuori dall'equilibrio termico. Allora, per consistenza, la sorgente di rumore di diffusione deve contenere come coefficiente di diffusione:

$$D'(\underline{r},\omega) = \frac{kT_0}{q} \mu'(\underline{r}). \quad (2.62)$$

Naturalmente, questa espressione non ha significato fisico per semiconduttori che presentino zone a mobilità differenziale negativa, come l'arseniuro di gallio. Inoltre, alcuni risultati sperimentali sembrano suggerire un andamento in funzione del campo elettrico del coefficiente di diffusione tale da condurre a un valore di saturazione ad alto campo diverso da zero [15]. Ciò significa che può essere conveniente utilizzare, per la sorgente di rumore di diffusione, un andamento *ad hoc* per la dipendenza dal campo elettrico del coefficiente di diffusione, eventualmente non consistente con quanto usato nelle equazioni in DC se non per il valore di basso campo.

### 2.4.3 Sorgenti microscopiche di rumore 1/f

Il rumore 1/f rappresenta una delle maggiori incognite nelle teorie che analizzano la presenza del rumore nei materiali. Infatti, a tutt'oggi, non è stato ancora trovato un accordo generale sull'origine di questa sorgente microscopica di rumore. Nonostante ciò, essa ha un notevole interesse applicativo, sia nei transistori MOS che nelle applicazioni non lineari a radiofrequenza dei dispositivi per microonde. Infatti, in quest'ultimo caso, il funzionamento del dispositivo in regime non-lineare causa una conversione del rumore a bassa frequenza (dove domina la sorgente 1/f) anche alla radiofrequenza di lavoro, dove l'unico contributo diretto è quello dovuto al rumore di diffusione.

Da un punto di vista sperimentale, si osserva che applicando a un pezzo di semiconduttore omogeneo<sup>7</sup> di resistenza  $R$  una tensione costante  $V$ , la

<sup>7</sup>In questa breve introduzione si farà sempre riferimento ai semiconduttori, ma il rumore

corrente  $I$  che lo attraversa presenta delle fluttuazioni  $\delta I$  il cui spettro è proporzionale a  $1/f$ :

$$\frac{S_{\delta I, \delta I}(\omega)}{|I|^2} = \frac{\text{cost}}{f}, \quad (2.63)$$

dove  $\omega = 2\pi f$ . Poiché la tensione applicata  $V$  è costante, le fluttuazioni di corrente possono essere dovute solo a fluttuazioni nella conducibilità del materiale:

$$V = RI = \text{cost} \Rightarrow \frac{\delta I}{I} = -\frac{\delta R}{R} \Leftrightarrow \frac{S_{\delta I, \delta I}}{|I|^2} = \frac{S_{\delta R, \delta R}}{R^2}. \quad (2.64)$$

Nel tentativo di sistematizzare i risultati sperimentali sugli spettri di rumore  $1/f$ , Hooge [17] ha proposto nel 1969 una relazione fenomenologica che oggi porta il suo nome:

$$\frac{S_{\delta I, \delta I}}{|I|^2} = \frac{S_{\delta R, \delta R}}{R^2} = \frac{\alpha_H}{Nf}, \quad (2.65)$$

dove  $\alpha_H$  è la *costante di Hooge*, che caratterizza la qualità del materiale dal punto di vista del rumore  $1/f$ , e  $N$  è il numero totale di elettroni presenti nel campione. L'unica ipotesi alla base della (2.65) è che le fluttuazioni che gli elettroni subiscono siano tra loro indipendenti, cioè scorrelate.

Avendo osservato che, per la maggior parte dei campioni omogenei di materiale semiconduttore,  $\alpha_H$  è compresa tra  $2 \times 10^{-3}$  e  $5 \times 10^{-3}$  [18, 19], è ragionevole ipotizzare che il rumore  $1/f$  sia l'espressione di qualche fenomeno fisico fondamentale. Poiché la resistenza di un pezzo di materiale omogeneo è inversamente proporzionale al prodotto tra la mobilità  $\mu$  dei portatori e il loro numero  $N$ , le fluttuazioni di resistenza  $\delta R$  possono essere ascritte a due cause tra loro scorrelate:

$$\frac{\delta R}{R} = -\frac{\delta \mu}{\mu} - \frac{\delta N}{N} \Rightarrow \frac{S_{\delta R, \delta R}}{R^2} = \frac{S_{\delta \mu, \delta \mu}}{\mu^2} + \frac{S_{\delta N, \delta N}}{N^2}. \quad (2.66)$$

Il rumore  $1/f$  può quindi essere dovuto a *fluttuazioni di mobilità* o di *numero* dei portatori, o a una loro combinazione, a seconda del tipo di materiale e della sua purezza.

Nel volume del materiale, è stata provata sperimentalmente l'esistenza di fluttuazioni di mobilità con spettro  $1/f$  e costante di Hooge pari a circa

$1/f$  è stato rilevato anche in altri materiali [16]. Inoltre, sono stati osservati spettri di rumore il cui andamento è proporzionale a  $1/f^\alpha$ , con  $\alpha$  compreso tra 1 e 2.

$10^{-4}$  (per un materiale ideale). In alcuni dispositivi a semiconduttore come i transistori MOS, invece, i risultati sperimentali possono essere efficacemente spiegati nell'ipotesi di fluttuazioni di numero di portatori legate a meccanismi di generazione-ricombinazione superficiale ([18, 20] e i riferimenti ivi contenuti).

Da un punto di vista teorico, sono state proposte sostanzialmente tre teorie in grado di dare origine a una sorgente microscopica di rumore del tipo<sup>8</sup>  $1/f$ . Per fluttuazioni del numero di portatori, lo spettro  $1/f$  è ottenuto dalla sovrapposizione di una serie di spettri di andamento lorentziano generati da una distribuzione opportuna di tempi di vita  $\tau$  dei processi di GR presenti nel materiale [18]. In particolare, una teoria valida per fenomeni di GR superficiali è stata proposta da McWhorter nel 1955 [21].

Le fluttuazioni di mobilità, invece, richiedono una analisi più accurata. Sono state sviluppate due teorie: quella detta del *rumore di interferenza locale* (Local Interference Noise) [22, 23, 24], che ottiene l'andamento  $1/f$  come sovrapposizione di lorentziane legate a fenomeni di scattering non assimilabili a meccanismi di GR (cioè, fenomeni che non modificano il numero di portatori), e la teoria del *rumore  $1/f$  quantistico* di Handel [25, 26], che si basa su un fenomeno di interferenza tra la parte della funzione d'onda (del singolo elettrone) corrispondente alla radiazione di Bremsstrahlung e quella che ne è indipendente.

Per quanto riguarda i modelli di rumore di dispositivi, occorre descrivere la sorgente microscopica in termini di una fluttuazione di densità di corrente locale, in modo da avere una opportuna sorgente di Langevin da introdurre nell'equazione di continuità. Come già osservato in precedenza, da un punto di vista rigoroso la sorgente di Langevin deve essere bianca (in quanto ricavata dalla Master Equation), e quindi la sorgente  $1/f$  deve considerarsi puramente fenomenologica. Si considera un volume  $\Delta V$  di materiale, sufficientemente piccolo da poter supporre la densità  $n$  degli elettroni costante. Allora  $N = n\Delta V$  e  $I = J\Delta A$ , essendo  $\Delta A$  la sezione trasversale al flusso di corrente del volumetto di materiale in esame. La (2.65) si scrive allora:

$$S_{\delta I, \delta I} = \frac{\alpha_H}{f} \frac{|J\Delta A|^2}{n\Delta V}, \quad (2.67)$$

<sup>8</sup>Si noti che, per ragioni energetiche, il contributo di rumore  $1/f$  non può essere tale su tutto lo spettro: sperimentalmente, però, non è stato ancora possibile determinare le frequenze alle quali lo spettro cambia pendenza [18].



dove  $S_{\delta I, \delta I} = (\Delta A)^2 S_{\delta J, \delta J}$ . Grazie a quest'ultima uguaglianza si ottiene:

$$S_{\delta J, \delta J} = \frac{\alpha_H |J|^2}{f n \Delta V} \quad (2.68)$$

che, per  $\Delta V \rightarrow 0$ , conduce alla espressione per la sorgente microscopica  $1/f$  proposta da Nougier [10]:

$$\underline{S}_{\xi, \xi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) = \frac{\alpha_H |J(\mathbf{r})|^2}{f n(\mathbf{r})} \underline{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.69)$$

dove  $\underline{I}$  è il tensore identità.

## 2.5 Caratterizzazione di n-porte rumorosi

Si consideri un generico dispositivo elettronico a semiconduttore. Questo basa il suo funzionamento sul fenomeno del trasporto di carica all'interno del materiale che lo compone, e quindi è soggetto alla presenza di fluttuazioni nelle grandezze fisiche che lo caratterizzano; tali fluttuazioni non sono altro che le sorgenti microscopiche di rumore descritte nelle sezioni precedenti.

Da un punto di vista sistemistico, il componente elettronico viene utilizzato in un circuito progettato in modo tale da ottenere il comportamento voluto (ad esempio, in un amplificatore, un oscillatore o un mixer): il progettista è certamente interessato a conoscere gli effetti che il rumore intrinseco al componente ha sul comportamento finale del circuito elettronico, ma altrettanto ovviamente non può condurre tale analisi sulla base delle sorgenti microscopiche. Infatti, in un circuito elettronico le grandezze di interesse primario sono le differenze di potenziale tra i nodi e le correnti che scorrono nei rami, e quindi occorre tradurre le sorgenti microscopiche all'interno di ognuno dei dispositivi in termini di generatori di tensione o di corrente di rumore collegati alle porte del dispositivo stesso.

In pratica, un dispositivo a  $n$  porte rumoroso viene rappresentato come un  $n$ -porte non rumoroso (descritto dalle stesse equazioni costitutive per quanto riguarda i valori medi delle tensioni e delle correnti) alle cui porte siano collegati dei *generatori casuali di rumore* a valor medio nullo, in generale tra loro correlati (Fig. 2.1). Tali generatori di rumore possono essere *generatori di tensione di circuito aperto* o *generatori di corrente di corto circuito*<sup>9</sup>, e sono

<sup>9</sup>Le due rappresentazioni sono equivalenti purché il circuito ammetta rappresentazione Thevenin e Norton.

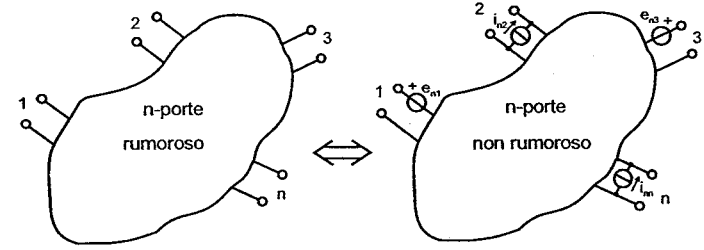


Figura 2.1. Rappresentazione circuitale equivalente di un  $n$ -porte rumoroso.

caratterizzati dalla relativa *matrice di correlazione*, ovvero quella matrice hermitiana il cui elemento  $i, j$  è la funzione di correlazione tra i generatori equivalenti di rumore collegati alle porte  $i$  e  $j$ , rispettivamente:

$$R_{\alpha_{ni}, \beta_{nj}}(\tau) = \overline{\alpha_{ni}(t) \beta_{nj}^*(t + \tau)}, \quad (2.70)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  possono essere una tensione o una corrente a seconda della rappresentazione scelta per la porta cui si riferiscono.

Si preferisce spesso caratterizzare i generatori di rumore con i relativi spettri di auto- e mutua-correlazione  $S_{\alpha_{ni}, \beta_{nj}}(\omega)$ , strettamente legati alla trasformata di Fourier della matrice di correlazione (App. A).

Da un punto di vista circuitale, la rappresentazione del  $n$ -porte rumoroso tramite i generatori esterni di rumore è detta *serie (parallelo)* se i generatori collegati a tutte le porte sono tensioni di rumore di circuito aperto (correnti di rumore di corto circuito). Nel caso in cui alcune porte siano rappresentate in serie e altre in parallelo, si parla di rappresentazione *ibrida*. Naturalmente, purché le equazioni costitutive dei valori medi lo permettano, tutte le rappresentazioni sono tra loro equivalenti: le relative matrici di correlazione possono essere poste in relazione biunivoca per mezzo dell'analisi circuitale e delle proprietà dei sistemi lineari (App. A). Nel seguito, verrà presentata una metodologia in grado di valutare gli spettri di correlazione relativi alla rappresentazione serie di un  $n$ -porte a partire dalla struttura fisica e dalla polarizzazione del componente elettronico in esame, ovvero fornire quel *trait d'union* necessario a collegare la fisica dei processi microscopici e la rappresentazione *macroscopica* delle proprietà di rumore così come richiesto dai progettisti circuitali.

## 2.6 Il Metodo del Campo di Impedenza

Questa sezione descrive la metodologia utilizzata in tutti i modelli di rumore di dispositivi elettronici a semiconduttore basati su una descrizione del trasporto dei portatori in termini dei *momenti* dell'equazione di Boltzmann, ovvero sulla soluzione di *equazioni differenziali a derivate parziali*. Tale metodologia si fonda sul formalismo di Langevin descritto in § 2.4, cioè sull'aggiungere alle equazioni che descrivono il trasporto (l'equazione di Poisson e le equazioni di continuità di elettroni e lacune) un termine forzante stocastico a valor medio nullo e di piccola ampiezza, tanto piccola da poter supporre che il sistema reagisca a tali sorgenti in linearità. Sulla base di questa ipotesi, si descrive l'effetto macroscopico delle sorgenti microscopiche di rumore con un integrale di convoluzione spazio-temporale avente come nucleo la funzione di Green del sistema lineare corrispondente, ovvero la risposta indotta da una sorgente impulsiva (nello spazio e nel tempo) omogenea alla corrispondente sorgente microscopica di rumore iniettata nel dispositivo.

La descrizione si basa sul classico modello *drift-diffusion* a due portatori [27, 28], sebbene la metodologia introdotta possa essere estesa in modo evidente a modelli di trasporto non stazionario come quello *energy balance* o *idrodinamico completo*. In quest'ultimo caso, per una introduzione alle sorgenti microscopiche di rumore si veda [29].

Il modello drift-diffusion consiste nelle tre equazioni differenziali accoppiate a derivate parziali che corrispondono all'equazione di Poisson e alle equazioni di continuità per elettroni e lacune<sup>10</sup>:

$$\nabla^2 \psi = -\frac{q}{\epsilon} (p - n + N^+), \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \nabla \cdot \underline{J}_n - U_n, \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q} \nabla \cdot \underline{J}_p - U_p, \quad (2.73)$$

dove:

- $\psi(\underline{r}, t)$ ,  $n(\underline{r}, t)$  e  $p(\underline{r}, t)$  sono, rispettivamente, il potenziale e le concentrazioni volumiche di elettroni e lacune nel dispositivo;

<sup>10</sup>Le equazioni vengono scritte per un dispositivo a omostruttura. Per un'estensione a dispositivi a eterostruttura si vedano [27, 28].

- $\epsilon$  è la permittività del materiale;
- $N^+$  è la concentrazione netta di cariche fisse positive;
- $\underline{J}_n = qn\mu_n \nabla \psi + qD_n \nabla n$  e  $\underline{J}_p = qp\mu_p \nabla \psi - qD_p \nabla p$  sono le densità di corrente di elettroni e lacune;
- $\mu$  e  $D$  sono la mobilità e il coefficiente di diffusione del portatore cui si riferiscono;
- $U_n$  e  $U_p$  sono il tasso netto di ricombinazione di elettroni e lacune, la cui espressione dipende dal meccanismo di GR che devono rappresentare [27].

Questo sistema deve poi essere completato dalle condizioni al contorno, che comprendono la frontiera isolante del dispositivo, i contatti e la polarizzazione che a questi viene applicata.

Il resto di questa sezione viene diviso in due parti. La prima consiste in una introduzione formale della tecnica di funzione di Green per l'analisi dell'effetto di sorgenti di piccola ampiezza su un sistema descritto da equazioni differenziali a derivate parziali, valida anche nel caso si voglia studiare la risposta a perturbazioni deterministiche. In § 2.6.2, infine, si introdurrà il metodo effettivamente usato per l'analisi di rumore.

### 2.6.1 La tecnica di funzione di Green

In termini astratti, il sistema di equazioni (2.71 – 2.73) può essere espresso nella forma:

$$F\left(\psi, n, p, \frac{\partial n}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t}\right) = 0 \quad (2.74)$$

la cui soluzione  $(\psi_0, n_0, p_0)$  dipende dalla geometria del sistema e dalle condizioni al contorno. Alla (2.74) si aggiunge un termine forzante di piccola ampiezza  $\underline{S}(\underline{r}, t)$  tale da modificarla in<sup>11</sup>:

$$F\left(\psi_0 + \delta\psi, n_0 + \delta n, p_0 + \delta p, \frac{\partial}{\partial t}(n_0 + \delta n), \frac{\partial}{\partial t}(p_0 + \delta p)\right) = \underline{S}. \quad (2.75)$$

<sup>11</sup>Si noti che anche il termine forzante è scritto in modo astratto, e non è necessariamente un processo casuale: potrebbe anche trattarsi di una fluttuazione deterministica di qualche grandezza rispetto alla quale si voglia studiare la *sensitivity* del dispositivo. Nel caso del rumore, invece, la sorgente è stocastica ed è concentrata esclusivamente nelle equazioni di continuità.

In accordo alle considerazioni precedenti, si assume che la risposta del sistema alla sollecitazione  $\underline{S}$  sia lineare, e quindi possa essere descritta dalla linearizzazione della (2.75):

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \psi} \right|_0 \delta \psi + \left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_0 \delta n + \left. \frac{\partial F}{\partial p} \right|_0 \delta p + \left. \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial n}{\partial t}} \right|_0 \frac{\partial \delta n}{\partial t} + \left. \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial p}{\partial t}} \right|_0 \frac{\partial \delta p}{\partial t} = \underline{S}. \quad (2.76)$$

A questo punto, si definisce la funzione di Green  $G_{i,j}(\underline{r}, \underline{r}_1; t, t_1)$  come la risposta del sistema linearizzato (2.76) (completato da opportune condizioni al contorno, sia derivate dalla linearizzazione delle condizioni al contorno del sistema completo che proprie del problema alle variazioni) sulla variabile  $\delta x_i$  ( $\delta \psi$ ,  $\delta n$  e  $\delta p$  per  $i = 1, 2, 3$  rispettivamente) a una sorgente unitaria impulsiva  $\delta(\underline{r} - \underline{r}_1)\delta(t - t_1)$  posta nella equazione  $j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Per il teorema di Green si ha:

$$\delta x_i(\underline{r}, t) = \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t G_{i,j}(\underline{r}, \underline{r}_1; t, t_1) S_j(\underline{r}_1, t_1) dt_1 d\underline{r}_1, \quad (2.77)$$

dove  $\Omega$  è il dominio spaziale del dispositivo. La (2.77) può essere semplificata nel caso in cui le condizioni al contorno consentano una soluzione di regime ( $\psi_0, n_0, p_0$ ) stazionaria, come accade per i transistori usati come amplificatori (ma non per i mixer o gli oscillatori, per cui la soluzione di regime è quasi periodica). Infatti, in questo caso il sistema lineare che si ottiene è invariante per traslazioni temporali, e quindi:

$$G_{i,j}(\underline{r}, \underline{r}_1; t, t_1) = G_{i,j}(\underline{r}, \underline{r}_1; t - t_1). \quad (2.78)$$

Pertanto, indicando con  $\tilde{f}(\underline{r}, \omega)$  la trasformata di Fourier nel tempo della funzione  $f(\underline{r}, t)$ , la (2.77) si scrive:

$$\delta x_i(\underline{r}, \omega) = \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \tilde{G}_{i,j}(\underline{r}, \underline{r}_1; \omega) \tilde{S}_j(\underline{r}_1, \omega) d\underline{r}_1. \quad (2.79)$$

### 2.6.2 L'analisi di rumore

Tornando al caso dell'analisi di rumore, si è visto in §2.4 che le sorgenti microscopiche di rumore possono essere scalari, omogenee a una variazione di tasso netto di ricombinazione, (2.43), (2.46) e (2.47), o vettoriali, omogenee a una variazione di densità di corrente di elettroni e/o di lacune, (2.55) e (2.69). Pertanto, il sistema drift-diffusion bipolare completo delle sorgenti

microscopiche di rumore di GR e di fluttuazioni di densità di corrente si scrive:

$$\nabla^2 \psi = -\frac{q}{\epsilon} (p - n + N^+), \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \nabla \cdot \underline{J}_n - U_n + \gamma_n + \frac{1}{q} \nabla \cdot \underline{\xi}_n, \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q} \nabla \cdot \underline{J}_p - U_p + \gamma_p + \frac{1}{q} \nabla \cdot \underline{\xi}_p. \quad (2.82)$$

Questo sistema può essere studiato con la metodologia introdotta in §2.6.1, ovvero con una tecnica di funzione di Green. Innanzitutto, si linearizza il problema attorno al punto di lavoro. Poiché si assume che il dispositivo sia in una condizione di regime stazionario, il corrispondente sistema lineare è invariante per traslazioni temporali; si può quindi condurre l'analisi direttamente nel dominio della frequenza, ottenendo:

$$\nabla^2 \delta \tilde{\psi} = -A_{\psi}(\delta \tilde{\psi}, \delta \tilde{n}, \delta \tilde{p}) \quad (2.83)$$

$$j\omega \delta \tilde{n} = -A_n(\delta \tilde{\psi}, \delta \tilde{n}, \delta \tilde{p}) + \tilde{\gamma}_n + \frac{1}{q} \nabla \cdot \tilde{\xi}_n, \quad (2.84)$$

$$j\omega \delta \tilde{p} = -A_p(\delta \tilde{\psi}, \delta \tilde{n}, \delta \tilde{p}) + \tilde{\gamma}_p + \frac{1}{q} \nabla \cdot \tilde{\xi}_p, \quad (2.85)$$

dove  $A_{\alpha}$  è una funzione lineare dei suoi argomenti, e dove si sono indicate formalmente le trasformate di Fourier delle sorgenti di rumore, sebbene la loro definizione richieda qualche cautela [30].

Scegliendo come variabile di uscita il potenziale di piccolo segnale  $\delta \tilde{\psi}(\underline{r}, \omega)$ , le due funzioni di Green (una per le sorgenti nell'equazione di continuità degli elettroni e l'altra per le lacune) soddisfano il sistema:

$$\nabla_{\underline{r}}^2 \tilde{G}_{\alpha}(\underline{r}, \underline{r}_1; \omega) = -A_{\psi}(\tilde{G}_{\alpha}, \delta \tilde{n}, \delta \tilde{p}), \quad (2.86)$$

$$j\omega \delta \tilde{n}(\underline{r}, \underline{r}_1; \omega) = -A_n(\tilde{G}_{\alpha}, \delta \tilde{n}, \delta \tilde{p}) + \delta_{\alpha, n} \delta(\underline{r} - \underline{r}_1), \quad (2.87)$$

$$j\omega \delta \tilde{p}(\underline{r}, \underline{r}_1; \omega) = -A_p(\tilde{G}_{\alpha}, \delta \tilde{n}, \delta \tilde{p}) + \delta_{\alpha, p} \delta(\underline{r} - \underline{r}_1), \quad (2.88)$$

dove  $\alpha = n, p$  e  $\delta_{\alpha, \beta}$  è il simbolo di Kronecker. Vista la linearità del sistema, è possibile valutare separatamente i contributi delle varie sorgenti di rumore:

$$\delta \tilde{\psi}(\underline{r}, \omega) = \int_{\Omega} \tilde{G}_n(\underline{r}, \underline{r}_1; \omega) \gamma_n(\underline{r}_1, \omega) d\underline{r}_1 + \int_{\Omega} \tilde{G}_n(\underline{r}, \underline{r}_1; \omega) \frac{1}{q} \nabla \cdot \tilde{\xi}_n(\underline{r}_1, \omega) d\underline{r}_1 +$$

$$+ \int_{\Omega} \tilde{G}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \omega) \gamma_p(\mathbf{r}_1, \omega) d\mathbf{r}_1 + \int_{\Omega} \tilde{G}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \omega) \frac{1}{q} \nabla \cdot \tilde{\xi}_p(\mathbf{r}_1, \omega) d\mathbf{r}_1; \quad (2.89)$$

si dimostra facilmente [31] che le sorgenti vettoriali sono collegate al potenziale indotto di piccolo segnale da una *funzione di Green vettoriale*  $\tilde{G}_\alpha$  tale che:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \omega) &= \int_{\Omega} \tilde{G}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \omega) \gamma_n(\mathbf{r}_1, \omega) d\mathbf{r}_1 - \int_{\Omega} \tilde{G}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \omega) \cdot \tilde{\xi}_n(\mathbf{r}_1, \omega) d\mathbf{r}_1 + \\ &+ \int_{\Omega} \tilde{G}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \omega) \gamma_p(\mathbf{r}_1, \omega) d\mathbf{r}_1 - \int_{\Omega} \tilde{G}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \omega) \cdot \tilde{\xi}_p(\mathbf{r}_1, \omega) d\mathbf{r}_1, \end{aligned} \quad (2.90)$$

dove la funzione di Green vettoriale è definita da:

$$\tilde{G}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \omega) = \frac{1}{q} \nabla_{\mathbf{r}_1} \tilde{G}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \omega) \quad \alpha = n, p \quad (2.91)$$

Allo scopo di pervenire alla rappresentazione serie dei generatori esterni di rumore di un dispositivo a  $N + 1$  terminali, si impone alle equazioni (2.86 – 2.88) la condizione al contorno aggiuntiva<sup>12</sup> che tutti i terminali del dispositivo meno uno (in particolare, lo  $(N + 1)$ -esimo che viene collegato a massa) siano in condizioni di circuito aperto in piccolo segnale. Se  $\mathbf{r}_i$  è la posizione del terminale  $i$ -esimo<sup>13</sup> ( $i = 1, \dots, N$ ), ha quindi interesse fisico il potenziale di piccolo segnale  $\delta\tilde{\psi}(\mathbf{r}_i, \omega) = \delta\tilde{\psi}(\mathbf{r}_i, \omega)$  indotto dalla sorgente microscopica all'interno del dispositivo. La corrispondente funzione di Green scalare  $\tilde{G}_\alpha(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_1; \omega)$  è legata al *campo di impedenza scalare*  $\tilde{Z}_\alpha$ , definito da Shockley *et al.* in [32] come il potenziale di piccolo segnale indotto da una sorgente di corrente scalare unitaria  $\delta i(\omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$  iniettata nel punto  $\mathbf{r}_1$  del dispositivo, dalla relazione:

$$\tilde{Z}_\alpha(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_1; \omega) = \frac{1}{q} \tilde{G}_\alpha(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_1; \omega) \quad \alpha = n, p. \quad (2.92)$$

Analogamente, la funzione di Green vettoriale calcolata sui terminali in circuito aperto corrisponde al *campo di impedenza vettoriale*  $\tilde{\underline{Z}}_\alpha$  definito in [32]

<sup>12</sup>Con il termine "aggiuntiva" si intende una ulteriore condizione al contorno rispetto a quelle ottenute per linearizzazione delle condizioni al contorno del sistema completo.

<sup>13</sup>La definizione è comunque univoca, infatti tutti i punti che afferiscono a un contatto sono equipotenziali.

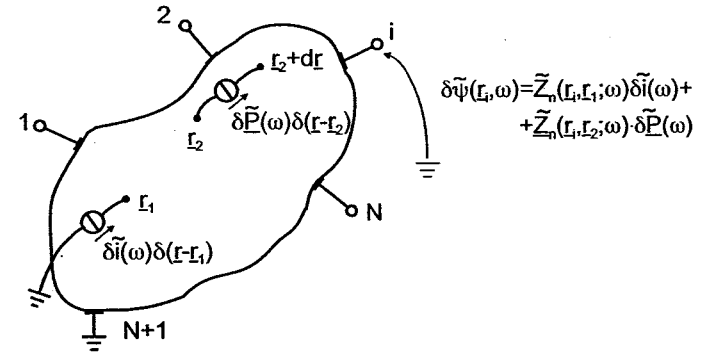


Figura 2.2. Interpretazione fisica dei campi di impedenza scalare e vettoriale.

come il potenziale indotto sui terminali da una sorgente di densità di corrente unitaria  $\delta\tilde{P}(\omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$  iniettata nel dispositivo (Fig. 2.2):

$$\tilde{\underline{Z}}_\alpha(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_1; \omega) = \nabla_{\mathbf{r}_1} \tilde{Z}_\alpha(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_1; \omega) \quad \alpha = n, p. \quad (2.93)$$

Infine, è a volte utile introdurre la funzione di Green diadica  $\tilde{\underline{G}}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \omega)$ , che pone in relazione una sorgente in densità di corrente al campo elettrico di piccolo segnale  $\delta\tilde{\underline{E}}(\mathbf{r}, \omega)$  che questa induce. Essendo, per definizione:

$$\delta\tilde{\underline{E}}(\mathbf{r}, \omega) = -\nabla \delta\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.94)$$

è immediato verificare che:

$$\tilde{\underline{G}}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \omega) = \nabla_{\mathbf{r}} \tilde{G}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \omega) = \frac{1}{q} \nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}_1} \tilde{G}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \omega). \quad (2.95)$$

La funzione di Green diadica corrisponde alla funzione di trasferimento definita nel *metodo dell'impedenza di trasferimento* proposto in [33] per l'analisi di rumore dei dispositivi elettronici. In ultima analisi, si può concludere che tutte le funzioni di trasferimento introdotte possono essere ricavate direttamente dalla sola funzione di Green scalare  $\tilde{G}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \omega)$  definita all'inizio di questa sezione.

Una volta valutata la funzione di Green scalare, è possibile calcolare lo spettro di correlazione tra due dei generatori esterni di tensione di rumore di

circuito aperto per mezzo di un integrale di sovrapposizione, la cui espressione può essere dimostrata esattamente tramite la teoria dei sistemi lineari a ingressi distribuiti ([30] e App. A):

$$S_{\delta\tilde{e}_i, \delta\tilde{e}_j}(\omega) = \sum_{\alpha, \beta=n,p} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{G}_{\alpha}(\underline{r}_i, \underline{r}_1; \omega) S_{\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}}(\underline{r}_1, \underline{r}_2; \omega) \tilde{G}_{\beta}^*(\underline{r}_j, \underline{r}_2; \omega) d\underline{r}_1 d\underline{r}_2 + \\ + \sum_{\alpha=n,p} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{G}_{\alpha}(\underline{r}_i, \underline{r}_1; \omega) \cdot \underline{S}_{\xi_{\alpha}, \xi_{\alpha}}(\underline{r}_1, \underline{r}_2; \omega) \cdot \tilde{G}_{\alpha}^{\dagger}(\underline{r}_j, \underline{r}_2; \omega) d\underline{r}_1 d\underline{r}_2. \quad (2.96)$$

L'espressione (2.96), già scritta nell'ipotesi di sorgenti microscopiche di rumore GR e di fluttuazioni di densità di corrente scorrelate, può essere ulteriormente semplificata tenendo conto che tutte le sorgenti microscopiche di rumore sono supposte spazialmente scorrelate. Infatti, le (2.46) e (2.47) hanno la forma:

$$S_{\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}}(\underline{r}, \underline{r}_1; \omega) = K_{\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}}(\underline{r}, \omega) \delta(\underline{r} - \underline{r}_1), \quad (2.97)$$

mentre le (2.55) e (2.69) possono essere espresse secondo:

$$\underline{S}_{\xi_{\alpha}, \xi_{\alpha}}(\underline{r}, \underline{r}_1; \omega) = \underline{K}_{\xi_{\alpha}, \xi_{\alpha}}(\underline{r}, \omega) \delta(\underline{r} - \underline{r}_1). \quad (2.98)$$

In entrambi i casi, lo spettro  $K$  (o  $\underline{K}$ ) viene detto *sorgente microscopica locale di rumore*, secondo la terminologia introdotta in [10, 34]. Grazie alle (2.97) e (2.98), la (2.96) si semplifica nella espressione seguente, che costituisce il classico risultato dell'applicazione del metodo del campo di impedenza [32]:

$$S_{\delta\tilde{e}_i, \delta\tilde{e}_j}(\omega) = \sum_{\alpha, \beta=n,p} \int_{\Omega} \tilde{G}_{\alpha}(\underline{r}_i, \underline{r}; \omega) K_{\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}}(\underline{r}; \omega) \tilde{G}_{\beta}^*(\underline{r}_j, \underline{r}; \omega) d\underline{r} + \\ + \sum_{\alpha=n,p} \int_{\Omega} \tilde{G}_{\alpha}(\underline{r}_i, \underline{r}; \omega) \cdot \underline{K}_{\xi_{\alpha}, \xi_{\alpha}}(\underline{r}; \omega) \cdot \tilde{G}_{\alpha}^{\dagger}(\underline{r}_j, \underline{r}; \omega) d\underline{r}. \quad (2.99)$$

## 3

## La simulazione di rumore nei dispositivi elettronici

### 3.1 Introduzione

Questo capitolo ha lo scopo di descrivere il tema della simulazione fisica di rumore di dispositivi elettronici a semiconduttore. § 3.2 ne costituisce l'introduzione storica, nel quale vengono riassunti i principali risultati ottenuti in questo settore negli ultimi anni. § 3.3, invece, è dedicato alla descrizione della nuova metodologia numerica introdotta in questo lavoro per la valutazione efficiente delle funzioni di Green scalari. Infine, l'implementazione di tale metodologia nell'ambito del simulatore multi-dimensionale PADRE degli AT&T Bell Laboratories è descritta in § 3.4.

### 3.2 I modelli fisici di rumore

La simulazione fisica di rumore nei dispositivi elettronici a semiconduttore ha, come già indicato in § 2.5, lo scopo di valutare le proprietà statistiche del secondo ordine, cioè la matrice di correlazione, dei generatori equivalenti di rumore collegati alle porte del dispositivo stesso. Questo risultato può essere ottenuto con due tecniche: la valutazione diretta delle funzioni di correlazione, per mezzo di una soluzione *Monte Carlo* dell'equazione di Boltzmann, o la decomposizione della valutazione degli spettri di correlazione dei generatori equivalenti di rumore in due sotto-problemi: l'identificazione delle sorgenti

microscopiche di rumore in termini di fluttuazioni locali di densità di corrente o di numero dei portatori (§ 2.4), e la valutazione quantitativa dell'effetto che queste sorgenti provocano ai terminali del dispositivo, che viene effettuata risolvendo un problema *lineare e deterministico* come nel *metodo del campo di impedenza* (§ 2.6). Quest'ultima metodologia ben si adatta all'analisi di rumore di dispositivi elettronici complessi, mentre la tecnica Monte Carlo è stata finora usata quasi esclusivamente per analizzare le proprietà di rumore di materiali omogenei o di semplici strutture  $n^+nn^+$  o  $p^+pp^+$  monodimensionali ([35] e i riferimenti ivi contenuti), sebbene sia stato recentemente proposto in [36] un modello Monte Carlo di MESFET in arseniuro di gallio, esteso anche al caso di FET a eterostruttura per microonde in [37]. In entrambi i casi, i modelli proposti sono monopolari (cioè considerano solo il trasporto di elettroni), e quindi non includono il rumore di GR.

Il metodo del campo di impedenza, invece, rappresenta la tecnica di analisi di rumore di gran lunga più utilizzata nell'analisi dei dispositivi, sebbene le sue attuazioni siano state per lo più confinate a modelli monodimensionali. In generale, tutti i modelli di rumore basati sull'approccio alla Langevin possono essere espressi in termini di una delle funzioni di Green definite in § 2.6.2. Inizialmente, tali funzioni di Green sono state usate per ottenere risultati analitici in casi molto semplificati, come in [38] o in una serie di lavori dedicati allo studio delle proprietà di rumore di dispositivi a giunzione  $pn$  sia in condizioni di bassa [39] che alta iniezione<sup>1</sup> [41, 42]. Sempre basandosi su considerazioni semi-analitiche, Pucel *et al.* hanno sviluppato un modello di rumore monodimensionale di MESFET in GaAs [43, 44] che include la sorgente microscopica di rumore di diffusione nell'ipotesi dell'*approssimazione di canale graduale*<sup>2</sup> (modello *quasi-2D*) [45] e assumendo il modello di Grebene e Ghandhi [46] per la relazione velocità-campo nel canale. Lo stesso modello è stato esteso al transistor a alta mobilità HEMT in [47, 48], con ulteriori modifiche introdotte in [49, 50]. Cappy e Heinrich hanno poi proposto [51] una interpretazione circuitale del metodo del campo di impedenza per l'analisi di rumore monopolare in modelli quasi-2D di FET per microonde.

Nonostante la facilità con cui la tecnica di funzione di Green può essere

<sup>1</sup>Si ricorda che si parla di "bassa iniezione" quando la concentrazione di portatori iniettati in una regione è trascurabile rispetto alle concentrazioni di equilibrio [40].

<sup>2</sup>Cioè nell'ipotesi di poter disaccoppiare le componenti di campo elettrico longitudinale e trasversale al flusso di corrente.

introdotta all'interno di un simulatore per dispositivi basato sul modello drift-diffusion, essa non è stata implementata in più di una dimensione spaziale se non recentemente. Il motivo alla base di questa difficoltà è il suo elevato costo di calcolo. Infatti, come si evince dalla (2.99), la funzione di Green deve essere valutata per ogni terminale lasciato in circuito aperto, e per ogni punto di iniezione all'interno del grigliato in cui il dominio del dispositivo è stato discretizzato. Se  $N_p$  è il numero di nodi nel grigliato e  $N$  il numero di terminali lasciati in circuito aperto, la valutazione diretta delle due funzioni di Green scalari necessarie all'analisi di rumore bipolare richiede  $2 \times N_p$  soluzioni del sistema di piccolo segnale discretizzato. Nel loro lavoro, Ghione *et al.* [52, 53, 54] hanno sviluppato una metodologia numerica efficiente in grado di valutare il campo di impedenza bidimensionale per un modello di trasporto drift-diffusion monopolare di MESFET al GaAs con sole  $N$  soluzioni del problema di piccolo segnale discretizzato. Questo algoritmo, detto *metodo aggiunto*, si basa sulla costruzione di un problema *aggiunto* a quello definito dalle equazioni drift-diffusion, cioè un insieme di equazioni e condizioni al contorno tale da essere *interreciproco* a quello diretto. Ciò significa che la corrispondente funzione di Green scalare aggiunta  $\tilde{G}_{ad}(\underline{r}, \underline{r}'; \omega)$  è legata a quella diretta  $\tilde{G}(\underline{r}, \underline{r}'; \omega)$  dalla relazione:

$$\tilde{G}(\underline{r}, \underline{r}'; \omega) = \tilde{G}_{ad}(\underline{r}', \underline{r}; \omega), \quad (3.1)$$

e quindi, per valutare la funzione di Green diretta in  $\underline{r} = \underline{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , sono sufficienti  $N$  soluzioni del sistema aggiunto discretizzato, in cui la sorgente (aggiunta) è iniettata nei contatti di posizione  $\underline{r}_i$ . Il metodo aggiunto è una estensione al caso continuo del metodo omonimo sviluppato da Roher *et al.* per valutare in modo efficiente la sensitivity e il rumore di reti elettriche [55, 56]. Una tecnica analoga a quella aggiunta è stata indipendentemente sviluppata in [57] per l'analisi 2D di dispositivi MOS, includendo nel modello le sorgenti microscopiche di rumore di diffusione e di rumore  $1/f$  fenomenologico. In questo lavoro, si propone una estensione del metodo aggiunto al modello drift-diffusion bipolare grazie a una generalizzazione del lavoro di Roher proposta da Branin in [58]. Tale metodologia verrà discussa accuratamente in § 3.3.

Infine, si osserva che il campo di impedenza classico di Shockley [32], ovvero il potenziale indotto ai terminali da una corrente scalare iniettata nel dispositivo, è stato calcolato direttamente anche per modelli di trasporto idrodinamico monodimensionali [29, 59] e tramite una soluzione diretta

dell'equazione di Boltzmann per mezzo dello *Scattered Packed Method* sviluppato presso l'Università di Montpellier [60, 61].

### 3.3 Il metodo numerico

Allo scopo di introdurre il nuovo metodo numerico appositamente sviluppato per valutare in modo efficiente la funzione di Green scalare associata alle equazioni (2.86 – 2.88), si riassume la tecnica di discretizzazione utilizzata nella maggioranza dei simulatori di dispositivi elettronici a semiconduttore: la cosiddetta *generalized box discretization*, o *approssimazione a volumi di controllo* [27]. Si può dimostrare che questo schema di discretizzazione è un algoritmo del primo ordine, ovvero è tale che l'errore di discretizzazione si riduce proporzionalmente al quadrato della dimensione del passo di discretizzazione. La seguente trattazione segue le linee indicate in [28], a loro volta utilizzate nel programma di simulazione PADRE (Pisces And Device REplacement) sviluppato presso gli AT&T Bell Laboratories, in cui è stato implementato il modello di rumore che verrà tra breve descritto.

La tecnica di discretizzazione a volumi di controllo è essenzialmente basata su una discretizzazione alle differenze finite delle equazioni integrate su opportuni volumi di controllo in cui il dominio del dispositivo è stato suddiviso<sup>3</sup>. Tutte le equazioni che costituiscono il modello possono essere espresse nella forma:

$$\nabla \cdot \underline{F}(\underline{r}) = u(\underline{r}), \quad (3.2)$$

che viene integrata sul volume di controllo  $\Omega_i$  associato al nodo  $i$ -esimo del grigliato. Facendo uso del teorema di Gauss, si ha che:

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \underline{F}(\underline{r}) d\underline{r} = \int_{\partial\Omega_i} \underline{F}(\underline{r}) \cdot \hat{n} dS = \int_{\Omega_i} u(\underline{r}) d\underline{r} \quad (3.3)$$

dove  $\partial\Omega_i$  è la frontiera del volume di controllo  $\Omega_i$  e  $\hat{n}$  ne è il versore normale esterno. Per una rappresentazione bidimensionale della geometria del problema in esame, si veda la Fig. 3.1.

L'equazione (3.3) viene poi discretizzata approssimando opportunamente con una tecnica alle differenze finite sia l'integrale superficiale che quello di volume che coinvolge la funzione  $u$ . In particolare, per l'equazione di

<sup>3</sup>Il metodo può essere applicato sia per simulazioni 2D che 3D, sebbene il caso tridimensionale sia ancora un po' meno diffuso di quello 2D a causa delle difficoltà nel generare in modo efficace il grigliato e dell'onerosità di calcolo.

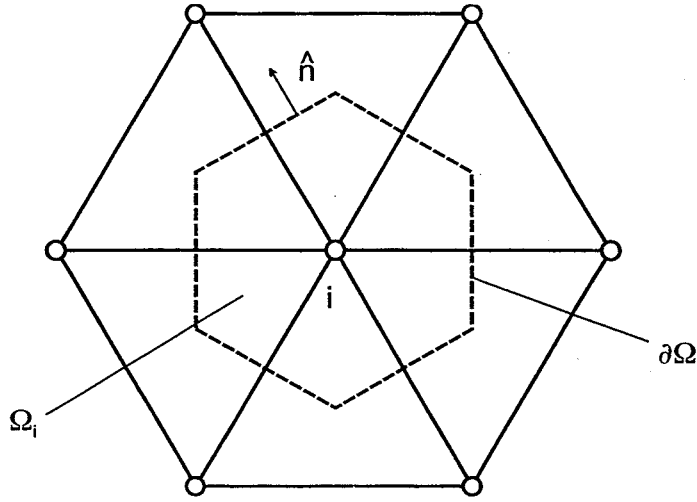


Figura 3.1. Rappresentazione bidimensionale del volume di controllo del nodo  $i$ -esimo  $\Omega_i$  e della sua frontiera  $\partial\Omega_i$ .

continuità si usa lo schema di discretizzazione di Scharfetter e Gummel [14] per eliminare le oscillazioni spaziali nella soluzione numerica. In questo modo, si generano  $N_p$  equazioni discretizzate (una per ogni nodo, essendo  $N_p$  il numero di nodi nel grigliato) per ognuna delle equazioni differenziali del modello.

Un punto particolarmente delicato nell'uso della tecnica di discretizzazione a volumi di controllo è la scelta dei volumi di controllo stessi, cioè l'algoritmo secondo il quale il dominio  $\Omega$  del dispositivo viene suddiviso. In particolare, si è osservato che devono essere soddisfatte due condizioni [28]:

- il volume di controllo  $\Omega_i$  deve essere il volume di Voronoi associato al nodo  $i$ -esimo, ovvero deve contenere tutti i punti di  $\Omega$  più vicini al nodo  $i$ -esimo che a qualunque altro nodo del grigliato;
- la partizione deve essere tale da consentire una agevole valutazione delle proiezioni  $\underline{F} \cdot \hat{n}$  in tutti i punti di  $\partial\Omega_i$ .

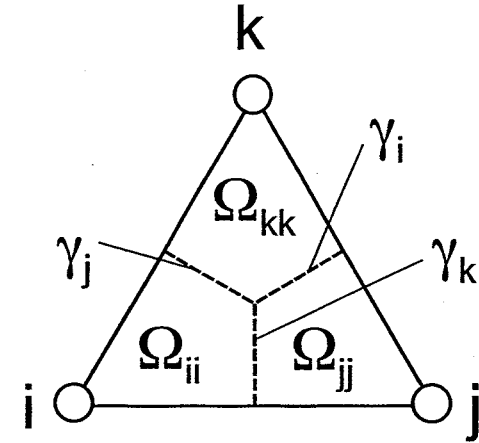


Figura 3.2. Suddivisione di un triangolo in tre sotto-aree definite dalle bisettrici perpendicolari a ogni lato. La sotto-area  $\Omega_{\alpha\alpha}$  corrisponde alla frazione dell'intero volume di Voronoi  $\Omega_\alpha$  associata al triangolo in esame.

Per un grigliato bidimensionale triangolare, queste due condizioni sono soddisfatte dividendo ogni triangolo in tre sotto-aree definite dalle *bisettrici* perpendicolari a ogni lato, che si incontrano nel centro della circonferenza circoscritta al triangolo stesso (Fig. 3.2). Così facendo, il criterio di Voronoi è soddisfatto purché il triangolo non sia *ottuso*, mentre la normale alla frontiera del volume di Voronoi è, per costruzione, parallela al lato del triangolo cui si riferisce. Infatti, con riferimento alla Fig. 3.2, il vettore ortogonale a  $\gamma_j$  ( $\gamma_k$ ,  $\gamma_i$ ) è parallelo al lato  $k-i$  ( $i-j$ ,  $j-k$ ). Questa proprietà suggerisce di approssimare  $\underline{F} \cdot \hat{n}$  con la corrispondente componente del flusso di  $\underline{F}$  lungo il lato dell'elemento in esame, che è una grandezza di solito facile da valutare. La presenza di triangoli ottusi deve essere il più possibile evitata onde ridurre le instabilità numeriche: a tale scopo sono stati proposti diversi algoritmi ([28] e i riferimenti ivi riportati), che non vengono però trattati in questa breve introduzione.

Per grigliati a tre dimensioni, nel caso più semplice si discretizza il dominio  $\Omega$  con elementi prismatici a base triangolare, che vengono a loro volta suddivisi in sotto-volumi costruiti prolungando ortogonalmente al triangolo



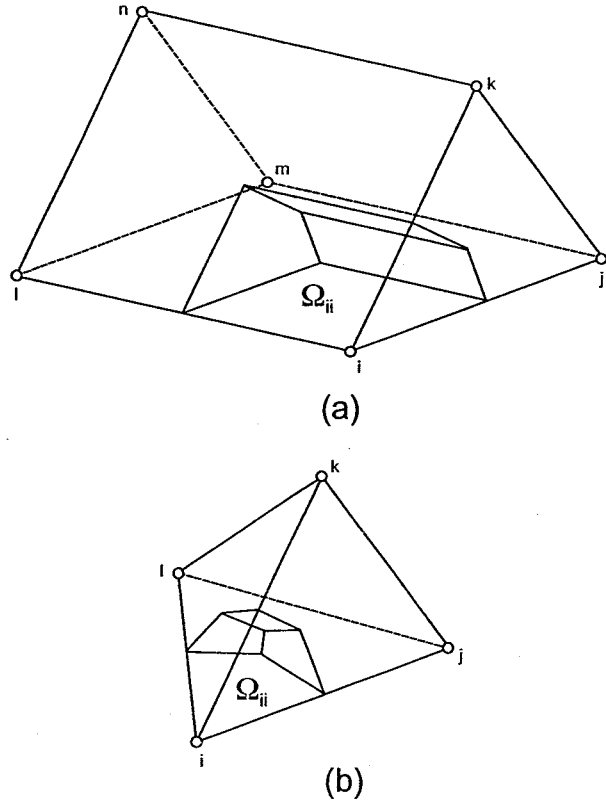


Figura 3.3. Suddivisione di un elemento prismatico a base triangolare (a) e di un tetraedro (b) nei corrispondenti sotto-volumi di Vornoi costruiti a partire dalla suddivisione per bisettrici perpendicolari delle facce dell'elemento in esame. Il sotto-volume  $\Omega_{ij}$  ha la stessa definizione della Fig. 3.2.

di base la corrispondente sotto-area fino a metà del prisma (Fig. 3.3 a). Per un grigliato a tetraedri, invece, il sottovolume di Vornoi del nodo  $i$ -esimo è definito dai piani ortogonali alle tre facce afferenti a  $i$  che intersecano le facce stesse nelle corrispondenti bisettrici perpendicolari di ogni faccia (Fig. 3.3 b).

La discretizzazione a volumi di controllo ben si adatta anche al calcolo della funzione di Green scalare. Infatti, integrando le equazioni (2.86 – 2.88) sul volume di controllo  $\Omega_i$ , la singolarità introdotta dalla delta di Dirac  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$  viene eliminata essendo:

$$\int_{\Omega_i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) d\mathbf{r} = \delta_{ij}, \quad (3.4)$$

dove  $\delta_{ij}$  è il simbolo di Kronecker e  $j$  è un indice (compreso tra 1 e  $N_p$ ) tale che  $\mathbf{r}_1 \in \Omega_j$ .

Oltre alle equazioni (2.86 – 2.88) discretizzate e alle condizioni al contorno linearizzate e discretizzate, occorre ancora aggiungere al sistema che definisce le funzioni di Green scalari  $N$  equazioni che assicurino l'annullarsi della corrente totale di piccolo segnale che attraversa gli  $N$  terminali del dispositivo in circuito aperto. Queste  $N$  equazioni ausiliarie richiedono l'introduzione di  $N$  ulteriori incognite oltre al potenziale e alle concentrazioni di piccolo segnale a ogni nodo. Tali incognite aggiuntive sono i potenziali di piccolo segnale applicati agli  $N$  terminali. Pertanto, se  $\underline{y} = \{\{\delta\psi_i\}, \{\delta\tilde{n}_i\}, \{\delta\tilde{p}_i\}\}^T$  ( $i = 1, \dots, N_p$ ) contiene le incognite interne al dispositivo e  $\underline{V} = \{V_k\}^T$  ( $k = 1, \dots, N$ ) rappresenta le incognite ausiliarie, per ogni punto  $\mathbf{r}_1 \in \Omega_j$  e per ogni equazione di continuità il sistema lineare da risolvere ha la forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{J}_c & \underline{B}_x \\ \underline{A}_x^T & \underline{D}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_j \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

dove:

- $\underline{J}_c \in \mathbb{C}^{N_t \times N_t}$  è una matrice complessa che descrive il sistema lineare di piccolo segnale (2.86 – 2.88). Chiaramente, tale matrice è strettamente legata allo Jacobiano del sistema ottenuto dalla discretizzazione delle equazioni in continua, differendo da questo solo per l'aggiunta dei termini in  $j\omega$  a primo membro delle equazioni di continuità [62]. La variabile  $N_t$  rappresenta il numero totale di equazioni di cui il sistema stesso è composto, e quindi vale  $N_t = (N_{\text{cont}} + 1) \times N_p$  essendo  $N_{\text{cont}}$  il numero di equazioni di continuità incluse nel modello (1 per una analisi monopolare, 2 per quella a due portatori). Inoltre, nella matrice  $\underline{J}_c$  devono essere già state imposte le condizioni al contorno: tutti i nodi afferenti a un contatto sono equipotenziali e le concentrazioni di piccolo segnale dei portatori sono nulle sui contatti stessi<sup>4</sup>;

<sup>4</sup>Per definizione, un contatto ohmico è caratterizzato da una velocità di ricombinazione infinita poiché i portatori soddisfano localmente la condizione di equilibrio.

- $\underline{B}_x \in \mathbb{C}^{N_t \times N}$  è una matrice che viene usata per imporre le condizioni al contorno sul potenziale di piccolo segnale;
- $\underline{A}_x^T \in \mathbb{C}^{N \times N_t}$  è una matrice che contiene le equazioni che impongono l'annullarsi della corrente di piccolo segnale agli  $N$  terminali in circuito aperto;
- $\underline{D}_x \in \mathbb{C}^{N \times N}$  è una matrice usata per accoppiare le equazioni ausiliarie ai potenziali di piccolo segnale degli  $N$  terminali in circuito aperto;
- $\underline{P}_j$  è un vettore a  $N_t$  componenti che rappresenta il termine forzante del problema. Esso è identicamente nullo se non per un elemento posto pari a 1 nella riga corrispondente al nodo  $j$ -esimo e alla equazione di continuità per la quale si sta calcolando la funzione di Green scalare.

Per valutare direttamente ognuna delle funzioni di Green scalari, allora, occorre risolvere  $N_p$  volte il sistema lineare (3.5), ogni volta cambiando il termine forzante  $\underline{P}_j$  spostando l'elemento unitario da un nodo all'altro. Ciò significa che il costo di calcolo complessivo, per una soluzione diretta del sistema in esame, corrisponde a quello della fattorizzazione della matrice di sistema e a  $N_{\text{cont}} \times N_p$  sostituzioni. Allo scopo di introdurre il nuovo metodo numerico, si scrive in forma matriciale il sistema lineare complessivo che definisce completamente le funzioni di Green scalari:

$$\begin{bmatrix} \underline{J}_c & \underline{B}_x \\ \underline{A}_x^T & \underline{D}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_j \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

dove ogni colonna della matrice incognita  $\{\underline{y}^T, \underline{V}^T\}^T$ , a  $N_t + N$  righe e  $N_{\text{cont}} \times N_p$  colonne, rappresenta la soluzione del sistema di piccolo segnale complessivo corrispondente alla sorgente descritta nella relativa colonna della matrice diagonale  $\underline{P}_j$ , avente  $N_t$  righe e  $N_{\text{cont}} \times N_p$  colonne, ottenuta accostando  $N_{\text{cont}} \times N_p$  repliche del vettore  $\underline{P}_j$  che si differenziano per la posizione dell'elemento unitario.

Il metodo numerico si basa sul fatto che non è necessario calcolare esplicitamente l'intera soluzione del sistema per ogni sorgente  $\underline{P}_j$  (2.99), ma è sufficiente determinare il potenziale di piccolo segnale che essa induce sui soli terminali in circuito aperto. In altri termini, è sufficiente valutare la matrice incognita  $\underline{V}$  definita nella (3.6). Sulla base di questa osservazione, si può sfruttare il metodo numerico proposto da Branin in [58], che si basa sulle

seguenti osservazioni. Si consideri il sistema lineare avente termine forzante e incognita matriciali:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b} \quad (3.7)$$

e si supponga di essere interessati solo alla riga  $i$ -esima  $\underline{x}_i^T$  dell'incognita  $\underline{x}$ . Formalmente si ha:

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}, \quad (3.8)$$

$$\underline{x}_i^T = \underline{e}_i^T \underline{x} = \underline{e}_i^T \underline{A}^{-1} \underline{b}, \quad (3.9)$$

dove  $\underline{e}_i^T$  è un vettore identicamente nullo eccetto per l'elemento  $i$ -esimo posto pari a 1. La (3.9) può essere espressa nella forma:

$$\underline{x}_i^T = \underline{y}_i^T \underline{b}, \quad (3.10)$$

dove si è definito il vettore incognito  $\underline{y}_i^T$  secondo:

$$\underline{y}_i^T = \underline{e}_i^T \underline{A}^{-1}. \quad (3.11)$$

Trasponendo ambo i membri della (3.11), si ottiene che il vettore incognito  $\underline{y}_i^T$  è soluzione del sistema lineare definito dalla matrice trasposta di  $\underline{A}$ :

$$\underline{A}^T \underline{y}_i = \underline{e}_i. \quad (3.12)$$

Da un punto di vista numerico, ciò significa che per valutare l'intera riga  $\underline{x}_i^T$  è sufficiente risolvere una sola volta il sistema lineare trasposto (3.12).

Applicando questa metodologia alla (3.6), si verifica immediatamente che è possibile calcolare *entrambe* le funzioni di Green scalari (nell'ipotesi di utilizzare un modello a due portatori) resolvendo una sola volta, per ognuno degli  $N$  terminali in circuito aperto, il sistema lineare trasposto, e poi moltiplicando la soluzione per il termine noto della (3.6) [63, 64]. Si osservi che questo algoritmo ottiene lo stesso vantaggio per l'onerosità di calcolo del metodo aggiunto [54], evitando però la costruzione esplicita del problema aggiunto. Ciò è dovuto al fatto che esso si basa solo su una proprietà formale dei sistemi lineari, e questa osservazione rappresenta anche il sostanziale vantaggio di questo metodo rispetto a quello aggiunto. Infatti, l'estensione a modelli di trasporto non stazionario e/o a sorgenti poste in altre equazioni del modello (non necessariamente di tipo stocastico: si pensi, ad esempio, a un problema di sensitivity rispetto a variazioni di drogaggio) è immediata.

### 3.4 Implementazione del modello di rumore nel simulatore PADRE

Il metodo numerico descritto in §3.3 è stato implementato, sia pure con alcune modifiche che verranno discusse di seguito, all'interno del programma di simulazione "general purpose" PADRE sviluppato presso lo ULSI Technology Research Department degli AT&T Bell Laboratories di Murray Hill, New Jersey. Tale simulatore è in grado di condurre una analisi in una, due o tre dimensioni spaziali<sup>5</sup> di dispositivi elettronici a semiconduttore a omio etero-struttura. Il modello è del tipo a equazioni differenziali a derivate parziali, con la possibilità di descrivere il trasporto di carica nella approssimazione drift-diffusion oppure in quella *energy balance*, che include anche l'equazione del trasporto dell'energia [28]. Inoltre, è anche possibile risolvere in modo consistente l'equazione del calore.

PADRE è in grado di simulare dispositivi aventi un numero arbitrario di terminali, e sono disponibili modelli per tutte le grandezze fisiche presenti nelle equazioni, quali la mobilità, i modelli per i meccanismi di generazione e ricombinazione e la ionizzazione parziale degli atomi droganti (per una descrizione completa si veda [28]). Il modello di rumore è stato implementato, per ora, solo per la descrizione drift-diffusion e sorgenti microscopiche di rumore di diffusione,  $1/f$  fenomenologico e di GR. Le prime due sorgenti microscopiche sono già state esaurientemente descritte in §2.4.2 e §2.4.3, mentre per il rumore di GR si introdurranno specificamente le espressioni della sorgente microscopica locale di rumore per i vari modelli di GR disponibili nel simulatore.

La valutazione del campo di impedenza è stata condotta con un metodo numerico leggermente differente rispetto a quello descritto in §3.3, sebbene sia ad esso strettamente legato e garantisca lo stesso vantaggio per l'onerosità di calcolo. La (3.6) può essere esplicitata nei due sistemi lineari accoppiati:

$$\underline{J}_c \underline{y} + \underline{B}_x \underline{V} = \underline{P}_j \quad (3.13)$$

$$\underline{A}_x^T \underline{y} + \underline{D}_x \underline{V} = 0 \quad (3.14)$$

dal primo dei quali si ricava formalmente:

$$\underline{y} = \underline{J}_c^{-1} (\underline{P}_j - \underline{B}_x \underline{V}). \quad (3.15)$$

<sup>5</sup>Nel caso 2D la discretizzazione si basa su un grigliato triangolare, mentre per simulazioni 3D gli elementi sono prismi a base triangolare.

Sostituendo nella (3.14) si ottiene l'equazione nella sola  $\underline{V}$ :

$$\underline{A}_x^T \underline{J}_c^{-1} (\underline{P}_j - \underline{B}_x \underline{V}) + \underline{D}_x \underline{V} = 0. \quad (3.16)$$

Definendo la matrice  $\underline{y}_0^T$  a  $N \times N_j$  componenti:

$$\underline{y}_0^T = \underline{A}_x^T \underline{J}_c^{-1}, \quad (3.17)$$

si osserva che:

$$(\underline{D}_x - \underline{y}_0^T \underline{B}_x) \underline{V} = -\underline{y}_0^T \underline{P}_j, \quad (3.18)$$

cioè:

$$\underline{V} = \underline{G} \underline{P}_j, \quad (3.19)$$

dove la matrice  $\underline{G} \in \mathbb{C}^{N \times N_j}$  è definita da:

$$\underline{G} = -(\underline{D}_x - \underline{y}_0^T \underline{B}_x)^{-1} \underline{y}_0^T. \quad (3.20)$$

Queste considerazioni suggeriscono di calcolare le funzioni di Green secondo il seguente algoritmo:

- (a) si calcola matrice  $\underline{y}_0$  definita dal sistema lineare:

$$\underline{J}_c^T \underline{y}_0 = \underline{A}_x; \quad (3.21)$$

- (b) si valuta la matrice  $\underline{G}$ , soluzione del sistema lineare (di dimensione  $N \times N_j$ , e quindi trascurabile per quanto riguarda il costo di calcolo):

$$(\underline{D}_x - \underline{y}_0^T \underline{B}_x) \underline{G} = -\underline{y}_0^T; \quad (3.22)$$

- (c) si determinano le funzioni di Green con il prodotto matriciale:

$$\underline{V} = \underline{G} \underline{P}_j. \quad (3.23)$$

Rispetto a una applicazione diretta del metodo descritto in §3.3, questo ha notevoli vantaggi: il punto (a), che presenta una onerosità di calcolo pari alla soluzione di  $N$  sistemi lineari di piccolo segnale definiti dalla trasposta della matrice di piccolo segnale stessa, non richiede di includere esplicitamente le equazioni ausiliarie nella matrice di sistema, che è memorizzata in modo sparso. Inoltre, la routine di soluzione vera e propria non dipende direttamente dal termine di sorgente  $\underline{P}_j$ : essa può essere utilizzata anche per calcolare

la funzione di Green corrispondente a una sorgente nell'equazione di Poisson, come richiesto, ad esempio, nell'analisi della sensitività delle tensioni di circuito aperto rispetto a una variazione di drogaggio. Infine, la tecnica di soluzione può essere usata anche per calcolare la funzione di Green relativa a modelli di trasporto di ordine superiore, quale quello *energy balance* o *idrodinamico completo*, dovendo solo fornire la matrice di piccolo segnale  $\underline{J}_c$  modificata e le nuove equazioni ausiliarie per imporre l'annullamento della corrente di piccolo segnale agli  $N$  terminali.

L'ultima parte di questo capitolo è dedicata alla implementazione delle equazioni (2.46) e (2.47) per i vari meccanismi di generazione e ricombinazione inclusi in PADRE. In particolare, si ricaveranno esplicitamente le espressioni per le sorgenti microscopiche locali di rumore di GR (§ 2.4.1 e § 2.6.2) per i seguenti meccanismi di transizione [27, 65]:

- diretta;
- Auger;
- da ionizzazione da impatto;
- Shockley Read Hall di volume;
- Shockley Read Hall superficiale.

Gli ultimi due meccanismi sono gli unici di tipo *indiretto*, cioè tali da richiedere l'interazione con un livello trappola. Nel seguito, si indicherà con  $R_\alpha$  il tasso di ricombinazione per unità di volume del portatore  $\alpha = n, p$ , mentre  $G_\alpha$  è il corrispondente tasso di generazione per unità di volume.

### 3.4.1 Transizioni dirette

Nel caso di transizioni banda-banda, i tassi di ricombinazione per unità di volume sono uguali sia per la banda di valenza che per quella di conduzione. Infatti, in una transizione banda-banda i portatori si generano o si ricombinano sempre a coppie. Quindi si ha:

$$R_n^{\text{DIR}} = R_p^{\text{DIR}} \quad G_n^{\text{DIR}} = G_p^{\text{DIR}} \quad (3.24)$$

Per una transizione diretta, i due processi di ricombinazione e generazione sono quelli indicati nella Fig. 3.4, dove la freccia indica lo spostamento di un

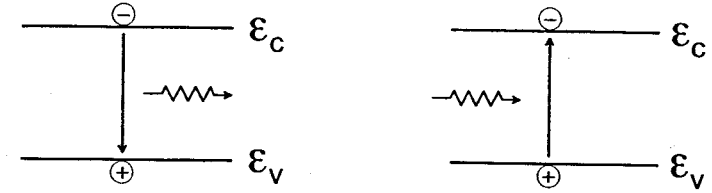


Figura 3.4. Processi di ricombinazione (a sinistra) e di generazione (a destra) nel caso di una transizione diretta. Le frecce sono relative allo spostamento di un elettrone.

elettrone. Il tasso di ricombinazione è quindi proporzionale al numero di elettroni liberi e al numero di lacune libere che si possono ricombinare:

$$R_n^{\text{DIR}} = R_p^{\text{DIR}} = C_c^{\text{DIR}} n p \quad (3.25)$$

mentre il tasso di generazione è una costante che dipende solo dalla temperatura:

$$G_n^{\text{DIR}} = G_p^{\text{DIR}} = C_e^{\text{DIR}}. \quad (3.26)$$

In equilibrio termodinamico vale il *principio dell'equilibrio dettagliato* [65] secondo il quale le popolazioni di elettroni e lacune sono separatamente in equilibrio:

$$(R_n^{\text{DIR}})_{\text{eq}} = (G_n^{\text{DIR}})_{\text{eq}} \quad (R_p^{\text{DIR}})_{\text{eq}} = (G_p^{\text{DIR}})_{\text{eq}}, \quad (3.27)$$

pertanto le costanti  $C_c^{\text{DIR}}$  e  $C_e^{\text{DIR}}$  soddisfano la condizione:

$$C_c^{\text{DIR}}(np)_{\text{eq}} = C_e^{\text{DIR}}. \quad (3.28)$$

Da queste considerazioni segue che i tassi di ricombinazione e generazione per unità di volume per una transizione diretta valgono:

$$R_n^{\text{DIR}} = R_p^{\text{DIR}} = \frac{1}{\tau_r N_{II}} n p \quad G_n^{\text{DIR}} = G_p^{\text{DIR}} = \frac{1}{\tau_r N_{II}} (np)_{\text{eq}}, \quad (3.29)$$

avendo posto  $C_c^{\text{DIR}} = (\tau_r N_{II})^{-1}$ , dove  $\tau_r$  è il *tempo di vita radiativo* che caratterizza la transizione e  $N_{II}$  è la concentrazione netta di droganti ionizzati [28]. Le corrispondenti sorgenti microscopiche locali di rumore sono definite

dalle (2.46), (2.47) e (2.97):

$$K_{\gamma_n, \gamma_n} = 2 (R_n^{\text{DIR}} + G_n^{\text{DIR}}), \quad (3.30)$$

$$K_{\gamma_p, \gamma_p} = 2 (R_p^{\text{DIR}} + G_p^{\text{DIR}}), \quad (3.31)$$

$$K_{\gamma_n, \gamma_p} = -2 (R_n^{\text{DIR}} + G_n^{\text{DIR}}) = -2 (R_p^{\text{DIR}} + G_p^{\text{DIR}}). \quad (3.32)$$

### 3.4.2 Transizioni Auger

La transizione Auger è ancora un processo di tipo banda-banda<sup>6</sup>, ma è caratterizzata dall'intervento energetico di una transizione intrabanda che fornisce l'energia necessaria alla transizione stessa. In altri termini, si tratta di un processo GR a tre portatori. Infatti, un processo Auger è costituito da una delle seguenti transizioni elementari, a loro volta rappresentate nella Fig. 3.5 [27]:

- (a) **Ricombinazione con intervento di un elettrone**, per cui l'energia prodotta dalla ricombinazione di una coppia elettrone-lacuna viene assorbita da un altro elettrone nella banda di conduzione. Il corrispondente tasso di ricombinazione per unità di volume è quindi proporzionale al prodotto delle concentrazioni di elettroni e lacune (probabilità di ricombinazione vera e propria) per la concentrazione di elettroni liberi (probabilità che un elettrone libero assorba l'energia prodotta dalla ricombinazione):

$$R_{(n)}^{\text{AU}} = C_{dn}^{\text{AU}} n^2 p. \quad (3.33)$$

Si noti che  $R_{(n)}^{\text{AU}}$  non indica il tasso di ricombinazione degli elettroni, ma la sua componente relativa alle sole ricombinazioni con intervento di elettroni. Questa distinzione ha effetto anche per gli altri sottoprocessi Auger.

- (b) **Ricombinazione con intervento di una lacuna**, per cui l'energia prodotta dalla ricombinazione di una coppia elettrone-lacuna viene assorbita da un'altra lacuna nella banda di valenza. Il tasso di ricombinazione per unità di volume vale:

$$R_{(p)}^{\text{AU}} = C_{dp}^{\text{AU}} n p^2. \quad (3.34)$$

<sup>6</sup>Si noti che ciò è vero solo nel caso più semplice. Infatti, esistono anche transizioni Auger che avvengono con la mediazione di un livello trappola [27].

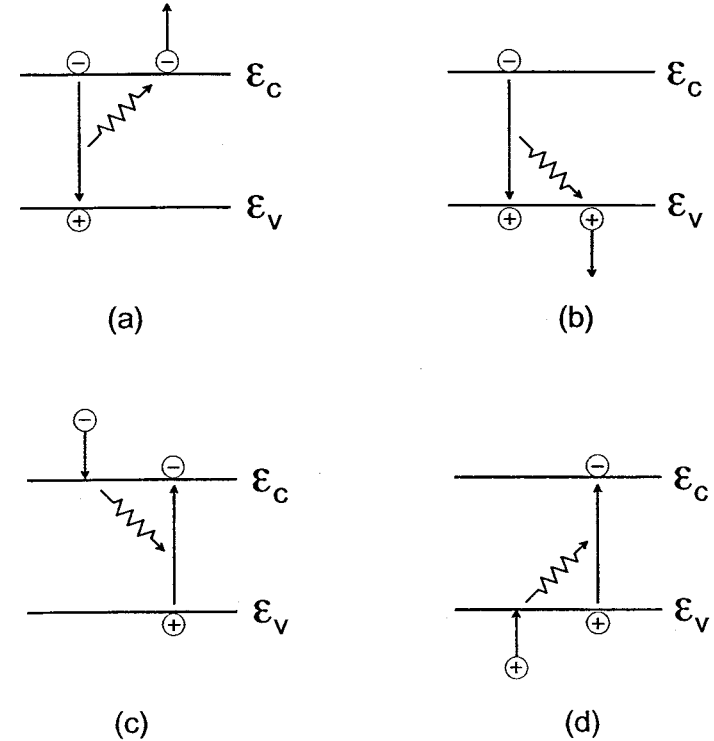


Figura 3.5. Transizioni elementari relative a un processo GR di tipo Auger: ricombinazione con intervento di un elettrone (a); ricombinazione con intervento di una lacuna (b); generazione con intervento di un elettrone (c); generazione con intervento di una lacuna (d).

- (c) **Generazione con intervento di un elettrone**, in cui l'energia necessaria alla generazione è fornita dal rilassamento intrabanda di un altro elettrone. La probabilità di generazione è proporzionale alla concentrazione di elettroni liberi, e quindi:

$$G_{(n)}^{\text{AU}} = C_{en}^{\text{AU}} n. \quad (3.35)$$

- (d) **Generazione con intervento di una lacuna**, in cui l'energia necessaria alla generazione è fornita dal rilassamento intrabanda di un'altra lacuna. La probabilità di generazione è proporzionale alla concentrazione di lacune libere:

$$G_{(p)}^{AU} = C_{ep}^{AU} p. \quad (3.36)$$

In equilibrio termico, il principio dell'equilibrio dettagliato richiede:

$$(R_{(n)}^{AU})_{eq} = (G_{(n)}^{AU})_{eq} \quad (R_{(p)}^{AU})_{eq} = (G_{(p)}^{AU})_{eq}, \quad (3.37)$$

cioè:

$$C_{en}^{AU} = C_{en}^{AU}(np)_{eq} = C_n(np)_{eq}, \quad (3.38)$$

$$C_{ep}^{AU} = C_{ep}^{AU}(np)_{eq} = C_p(np)_{eq}. \quad (3.39)$$

I tassi di ricombinazione e generazione per unità di volume sono, quindi, dati da:

$$R_n^{AU} = R_p^{AU} = R_{(n)}^{AU} + R_{(p)}^{AU} = (C_n n + C_p p) np, \quad (3.40)$$

$$G_n^{AU} = G_p^{AU} = G_{(n)}^{AU} + G_{(p)}^{AU} = (C_n n + C_p p)(np)_{eq}; \quad (3.41)$$

mentre le sorgenti microscopiche locali di rumore valgono:

$$K_{\gamma_n, \gamma_n} = 2(R_n^{AU} + G_n^{AU}), \quad (3.42)$$

$$K_{\gamma_p, \gamma_p} = 2(R_p^{AU} + G_p^{AU}), \quad (3.43)$$

$$K_{\gamma_n, \gamma_p} = -2(R_n^{AU} + G_n^{AU}) = -2(R_p^{AU} + G_p^{AU}). \quad (3.44)$$

### 3.4.3 Transizioni da ionizzazione per urto

La transizione da ionizzazione per urto è un meccanismo di generazione banda-banda con intervento di un terzo portatore, e quindi, da un punto di vista microscopico, è del tutto equivalente alle transizioni elementari (c) e (d) introdotte nella Fig. 3.5. Contrariamente alle transizioni Auger, però, l'energia fornita alla transizione deriva dall'energia cinetica dei portatori in moto nel semiconduttore, e quindi è proporzionale alla densità di corrente:

$$G_n^{\Pi} = G_p^{\Pi} = \alpha_n \frac{|J_n|}{q} + \alpha_p \frac{|J_p|}{q}, \quad (3.45)$$

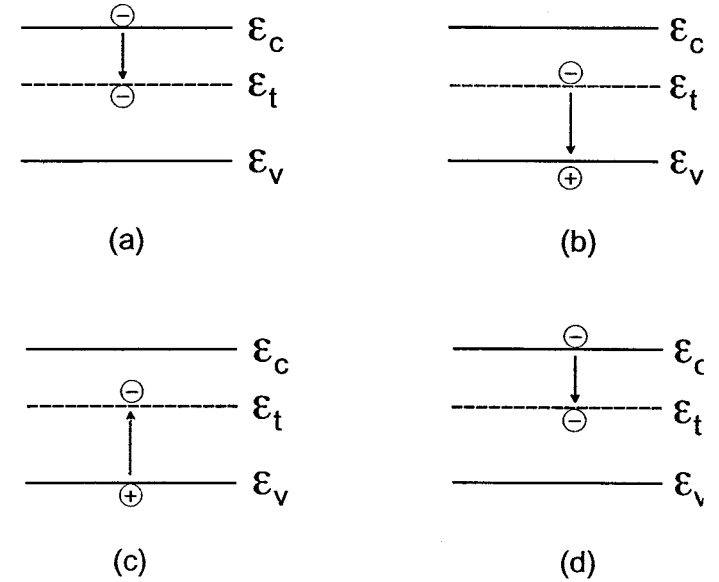


Figura 3.6. Transizioni elementari relative a un processo GR di tipo Shockley Read Hall: cattura di un elettrone (a); cattura di una lacuna (b); emissione di una lacuna (c); emissione di un elettrone (d).

dove i coefficienti  $\alpha_n$  e  $\alpha_p$ , funzione del campo elettrico, sono i *tassi di ionizzazione* di elettroni e lacune, rispettivamente. Da un punto di vista fisico, essi corrispondono al numero di coppie elettrone-lacuna generate per unità di tempo, per unità di spazio percorso e per unità di elettrone o lacuna [27]. Le corrispondenti sorgenti microscopiche locali di rumore sono:

$$K_{\gamma_n, \gamma_n} = 2G_n^{\Pi}, \quad (3.46)$$

$$K_{\gamma_p, \gamma_p} = 2G_p^{\Pi}, \quad (3.47)$$

$$K_{\gamma_n, \gamma_p} = -2G_n^{\Pi} = -2G_p^{\Pi}. \quad (3.48)$$

### 3.4.4 Transizioni Shockley Read Hall di volume

Tutti i meccanismi di generazione-ricombinazione considerati sinora sono di tipo banda-banda. Questi sono di particolare importanza nei semiconduttori

a gap diretto, come il GaAs, ma non sono preminenti nei semiconduttori a gap indiretto come il silicio. Infatti, esiste un meccanismo di GR assistito da livelli trappola che ha la massima probabilità di aver luogo sia nel caso dei semiconduttori a gap diretto che in quelli a gap indiretto. Da un punto di vista microscopico, si tratta di una transizione assistita da fononi (i quali forniscono la quantità di moto necessaria a garantirne la conservazione) che ha luogo in due tempi attraverso la mediazione di un livello energetico  $\mathcal{E}_t$  introdotto nella struttura a bande del materiale dalla presenza di una impurità. Il modello di questo processo utilizzato nella simulazione dei semiconduttori è stato proposto da Shockley, Read [66] e Hall [67] nel 1952, ed è basato sulla decomposizione nei seguenti quattro sotto-processi:

- (a) **Cattura di un elettrone**, per cui un elettrone nella banda di conduzione viene catturato da una impurità libera, che quindi risulta essere ionizzata (Fig. 3.6 a). Se  $f_t$  è la probabilità che la trappola sia occupata, il tasso di ricombinazione corrispondente vale:

$$R_n^{\text{SRH}} = C_{cn}^{\text{SRH}} n (1 - f_t). \quad (3.49)$$

- (b) **Cattura di una lacuna**, per cui un elettrone intrappolato in una impurità viene liberato verso la banda di valenza, dove si ricombina con una lacuna (Fig. 3.6 b). Il tasso di ricombinazione associato a questa transizione è dato da:

$$R_p^{\text{SRH}} = C_{cp}^{\text{SRH}} p f_t. \quad (3.50)$$

- (c) **Emissione di una lacuna**, per cui un elettrone nella banda di valenza viene catturato da una impurità liberando una lacuna nella banda di valenza (Fig. 3.6 c). Questo processo determina il tasso di generazione delle lacune secondo:

$$G_p^{\text{SRH}} = C_{cp}^{\text{SRH}} (1 - f_t). \quad (3.51)$$

- (d) **Emissione di un elettrone**, per cui un elettrone intrappolato in una impurità viene liberato verso la banda di conduzione (Fig. 3.6 d). Il corrispondente tasso di generazione degli elettroni vale:

$$G_n^{\text{SRH}} = C_{cn}^{\text{SRH}} f_t. \quad (3.52)$$

In equilibrio termico, il principio dell'equilibrio dettagliato impone che:

$$(R_n^{\text{SRH}})_{\text{eq}} = (G_n^{\text{SRH}})_{\text{eq}} \quad (R_p^{\text{SRH}})_{\text{eq}} = (G_p^{\text{SRH}})_{\text{eq}}, \quad (3.53)$$

quindi i coefficienti che compaiono nelle espressioni dei tassi di generazione per unità di volume sono dati da:

$$C_{cn}^{\text{SRH}} = C_{cn}^{\text{SRH}}(n)_{\text{eq}} \frac{1 - (f_t)_{\text{eq}}}{(f_t)_{\text{eq}}} = C_{cn}^{\text{SRH}} n_1 = \frac{n_1}{\tau_n}, \quad (3.54)$$

$$C_{cp}^{\text{SRH}} = C_{cp}^{\text{SRH}}(p)_{\text{eq}} \frac{(f_t)_{\text{eq}}}{1 - (f_t)_{\text{eq}}} = C_{cp}^{\text{SRH}} p_1 = \frac{p_1}{\tau_p} \quad (3.55)$$

dove sono stati definiti i tempi di vita di elettroni e lacune ( $\tau_n$  e  $\tau_p$ , rispettivamente), e dove si è posto:

$$n_1 = (n)_{\text{eq}} \frac{1 - (f_t)_{\text{eq}}}{(f_t)_{\text{eq}}} = N_c \mathcal{F}_{1/2} \left( \frac{\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_c}{kT} \right), \quad (3.56)$$

$$p_1 = (p)_{\text{eq}} \frac{(f_t)_{\text{eq}}}{1 - (f_t)_{\text{eq}}} = N_v \mathcal{F}_{1/2} \left( \frac{\mathcal{E}_v - \mathcal{E}_t}{kT} \right), \quad (3.57)$$

essendo  $\mathcal{F}_{1/2}$  l'integrale di Fermi-Dirac e  $N_c$  e  $N_v$  la densità efficace degli stati della banda di conduzione e di valenza, rispettivamente.

Per rendere il modello consistente, occorre ancora valutare  $f_t$  fuori dall'equilibrio termico. Per farlo, si assume di poter trascurare la dinamica del livello trappola  $\mathcal{E}_t$ , ovvero si suppone che gli elettroni restino nel livello trappola per un tempo trascurabile rispetto alle transizioni verso le bande del semiconduttore. Ciò equivale a assumere:

$$R_n^{\text{SRH}} - G_n^{\text{SRH}} = R_p^{\text{SRH}} - G_p^{\text{SRH}}. \quad (3.58)$$

Da questa condizione si ricava che:

$$f_t = \frac{n\tau_p + p\tau_n}{\tau_p(n + n_1) + \tau_n(p + p_1)}, \quad (3.59)$$

e quindi si ha:

$$R_n^{\text{SRH}} = \frac{n}{\tau_n} \frac{n_1\tau_p + p\tau_n}{\tau_p(n + n_1) + \tau_n(p + p_1)}, \quad (3.60)$$

$$G_n^{\text{SRH}} = \frac{n_1}{\tau_n} \frac{n\tau_p + p\tau_n}{\tau_p(n + n_1) + \tau_n(p + p_1)}, \quad (3.61)$$

$$R_p^{\text{SRH}} = \frac{p}{\tau_p} \frac{n\tau_p + p\tau_n}{\tau_p(n + n_1) + \tau_n(p + p_1)}, \quad (3.62)$$

$$G_p^{\text{SRH}} = \frac{p_1}{\tau_p} \frac{n_1\tau_p + p\tau_n}{\tau_p(n + n_1) + \tau_n(p + p_1)}. \quad (3.63)$$

Le corrispondenti sorgenti microscopiche locali di rumore sono:

$$K_{\gamma_n, \gamma_n} = 2 \left( R_n^{\text{SRH}} + G_n^{\text{SRH}} \right), \quad (3.64)$$

$$K_{\gamma_p, \gamma_p} = 2 \left( R_p^{\text{SRH}} + G_p^{\text{SRH}} \right), \quad (3.65)$$

$$K_{\gamma_n, \gamma_p} = 0. \quad (3.66)$$

### 3.4.5 Transizioni Shockley Read Hall superficiali

L'ultimo meccanismo di generazione-ricombinazione incluso nel modello di rumore è quello relativo alle transizioni Shockley Read Hall superficiali. Esse sono descritte dagli stessi meccanismi microscopici elencati in § 3.4.4, ma sono caratterizzate dalle *velocità di ricombinazione superficiale* degli elettroni  $v_{sn}$  e delle lacune  $v_{sp}$ . Una analisi del tutto analoga a quella effettuata nel volume conduce a una espressione dei tassi di ricombinazione e generazione *per unità di area* formalmente identica a quella ottenuta per i tassi di ricombinazione e generazione *per unità di volume*, purché si sostituiscano le velocità di ricombinazione ai tempi di vita [28]. Nella implementazione in un simulatore basato sulla discretizzazione a volumi di controllo, però, conviene definire dei tassi di GR equivalenti *per unità di volume*  $G_\alpha^{\text{SURF}}$  e  $R_\alpha^{\text{SURF}}$  associati ai volumi di controllo dei soli nodi afferenti alla superficie in esame, e tali che il loro integrale di volume sia pari all'integrale di superficie dei tassi di generazione e ricombinazione *per unità di area* originali. Ciò può essere ottenuto definendo un tempo di vita equivalente funzione del nodo superficiale  $i$ -esimo secondo:

$$\tau_{s\alpha, i} = \frac{v_{s\alpha} P_i}{V_i} \quad \alpha = n, p, \quad (3.67)$$

dove  $V_i$  è la misura del volume di controllo  $\Omega_i$  associato al nodo superficiale  $i$ -esimo, e  $P_i$  è la misura di quella parte della frontiera di  $\Omega_i$  che si trova sulla superficie<sup>7</sup>. Con questo accorgimento,  $G_\alpha^{\text{SURF}}$  e  $R_\alpha^{\text{SURF}}$  sono espressi utilizzando le stesse relazioni ricavate nel volume del materiale, pur di sostituire i tempi di vita con quelli equivalenti. Infine, anche per le transizioni superficiali le sorgenti microscopiche locali di rumore sono date da:

$$K_{\gamma_n, \gamma_n} = 2 \left( R_n^{\text{SURF}} + G_n^{\text{SURF}} \right), \quad (3.68)$$

<sup>7</sup>Per un modello 2D,  $V_i$  ha le dimensioni di un'area e  $P_i$  ha le dimensioni di una lunghezza; per un modello 3D,  $V_i$  ha le dimensioni di un volume e  $P_i$  ha le dimensioni di un'area.

$$K_{\gamma_p, \gamma_p} = 2 \left( R_p^{\text{SURF}} + G_p^{\text{SURF}} \right), \quad (3.69)$$

$$K_{\gamma_n, \gamma_p} = 0. \quad (3.70)$$



## 4

## Analisi dei risultati

### 4.1 Introduzione

Questo capitolo è dedicato all'applicazione del modello fisico di rumore, descritto nel Cap. 3, alla simulazione di diversi dispositivi elettronici a semiconduttore. Il primo esempio è quello del materiale uniformemente drogato, tale da costituire un semplice resistore 1D (§4.2), mentre in §4.3 vengono presentati i risultati relativi alla simulazione 1D di un diodo  $p^+pp^+$  in silicio, confrontandoli con quanto ottenuto direttamente dall'equazione di Boltzmann, risolta con lo Scattered Packed Method, e con un modello di trasporto idrodinamico completo.

§4.4 introduce l'analisi di rumore bipolare di un diodo  $pn$  monodimensionale, mentre §4.5 è dedicato alla simulazione 2D di un diodo  $pn$  impiantato. Nelle ultime due sezioni si analizzano le proprietà di rumore di due diversi dispositivi a due porte per mezzo di una simulazione 2D: in §4.6 si studia un semplice due-porte resistivo, mentre in §4.7 si considera un MESFET al silicio.

### 4.2 Il campione uniformemente drogato

Il primo esempio di analisi di rumore di un dispositivo a semiconduttore mediante l'applicazione del modello descritto in §3.4 è relativo a una analisi 1D di un pezzo di semiconduttore al silicio uniformemente drogato di tipo  $n$ , con una concentrazione di atomi droganti pari a  $N_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ , una lunghezza di  $100 \text{ } \mu\text{m}$  e una sezione trasversale di  $100 \text{ } \mu\text{m}^2$ . Questa semplice

struttura è, da un punto di vista elettrico, un resistore del valore di  $450 \text{ } \Omega$  in corrente continua. La simulazione è stata condotta nell'ipotesi di poter trascurare la dipendenza del campo elettrico della velocità dei portatori liberi all'interno del materiale, siano essi elettroni o lacune. In altre parole, si è supposto di poter considerare costante la mobilità al valore  $\mu_n = 1390 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ , per gli elettroni, e  $\mu_p = 470 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ , per le lacune. Da una analisi di piccolo segnale, inoltre, si verifica l'esistenza di un piccolo effetto parassita di tipo capacitivo, in modo da determinare un circuito equivalente di piccolo segnale definito dal parallelo di un resistore  $R$  del valore di  $450 \text{ } \Omega$  e una capacità  $C$  del valore di  $104,5 \text{ aF}$ . Pertanto, l'impedenza equivalente di piccolo segnale  $Z$  di questo dispositivo ha una frequenza di taglio  $f_t$  definita da:

$$f_t = \frac{1}{2\pi RC} = 3,38 \text{ GHz.} \quad (4.1)$$

La Fig. 4.2 rappresenta l'andamento in frequenza dello spettro della tensione di rumore di circuito aperto del resistore, includendo nel modello le sorgenti microscopiche di rumore di diffusione e  $1/f$  fenomenologico. La costante di Hooge del silicio utilizzata nella simulazione vale  $\alpha_H = 3 \times 10^{-5}$ . Nella stessa figura sono anche rappresentati gli andamenti in frequenza delle componenti teoriche dello spettro di tensione di rumore di circuito aperto relative al rumore di diffusione e al rumore  $1/f$ . Infatti, per un resistore ideale vale la legge di Nyquist:

$$S_{v,v}(\omega) = 4kT \text{Re}\{Z(\omega)\}, \quad (4.2)$$

essendo  $T$  la temperatura e  $Z(\omega)$  l'impedenza di piccolo segnale del resistore, mentre il rumore  $1/f$  deve soddisfare la relazione (2.65). L'accordo tra gli andamenti teorici e quello simulato è eccellente per tutte le frequenze considerate, compreso l'intorno della frequenza di taglio  $f_t$  (Fig. 4.2).

Nel caso di un resistore ideale è anche possibile prevedere l'andamento del campo di impedenza dei portatori maggioritari. Infatti, da un punto di vista fisico il campo di impedenza (§2.6.2 e [32]) è la tensione di piccolo segnale indotta sul terminale in circuito aperto da una corrente scalare iniettata all'interno del dispositivo. Nel caso di un resistore monodimensionale, ciò corrisponde al circuito di Fig. 4.1, dal quale si ricava immediatamente che:

$$Z_n(x) = Z \frac{x}{L}, \quad (4.3)$$

se  $Z$  è l'impedenza di piccolo segnale del dispositivo e  $L$  ne è la lunghezza.

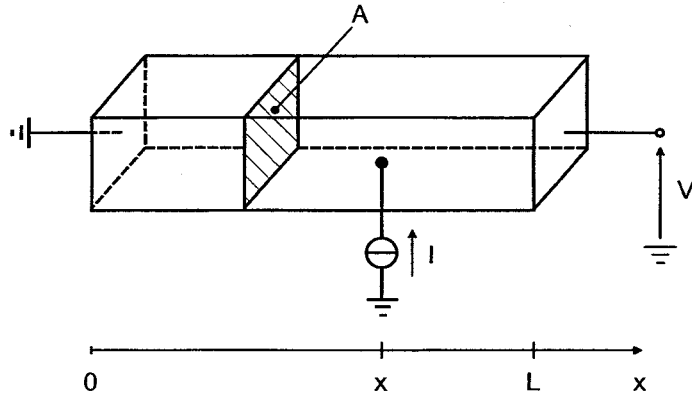


Figura 4.1. Interpretazione circuitale della definizione di campo di impedenza scalare per un resistore monodimensionale.

Le Figg. 4.3 e 4.4 rappresentano l'andamento della parte reale e della parte immaginaria, rispettivamente, del campo di impedenza degli elettroni (cioè dei portatori maggioritari) per una frequenza di 1 MHz e una polarizzazione di 1 V. L'andamento lineare previsto dalla (4.3) è, in entrambi i casi, rispettato. Il campo di impedenza dei portatori minoritari (cioè le lacune) è, invece, fortemente non lineare, sia per la parte reale (Fig. 4.5) che per la parte immaginaria (Fig. 4.6). Tale non linearità non ha però effetti pratici sullo spettro di rumore di tensione di circuito aperto poiché la *sorgente locale di rumore* relativa ai portatori minoritari, ovvero la funzione il cui integrale di volume rappresenta lo spettro di potenza del generatore esterno (2.99), è di molti ordini di grandezza inferiore a quella relativa ai portatori maggioritari. La dipendenza spaziale di tali sorgenti locali di rumore è descritta dalla Fig. 4.7, che mostra chiaramente come la sorgente locale delle lacune sia almeno 10 ordini di grandezza inferiore a quella degli elettroni, che è invece costante lungo tutto il dispositivo, come ci si attende da un resistore a drogaggio costante.

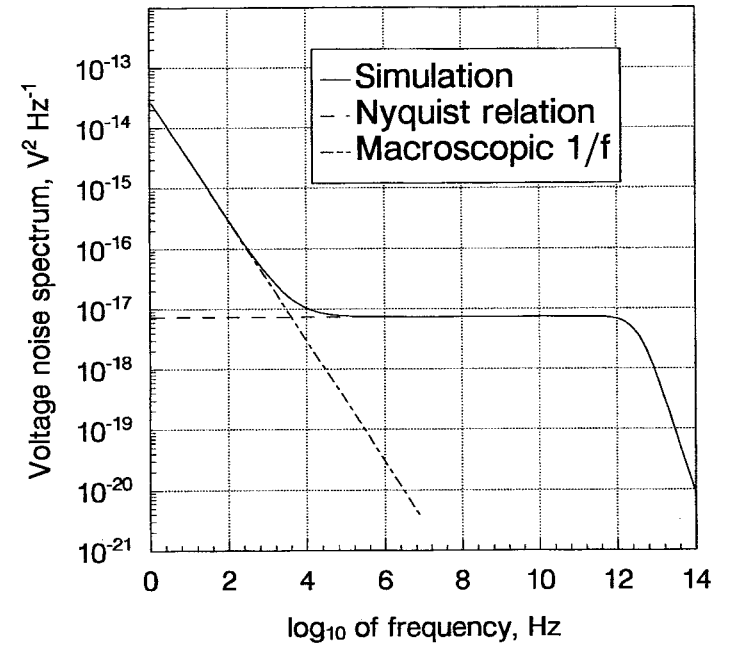


Figura 4.2. Confronto tra il valore simulato e quello teorico dello spettro della tensione di rumore del resistore 1D. La linea tratteggiata è la relazione di Nyquist  $S_{v,v} = 4kT \operatorname{Re}\{Z\}$ , mentre quella a tratto-punto è il valore fenomenologico del rumore  $1/f$ . La polarizzazione è  $V_d = 1$  V.

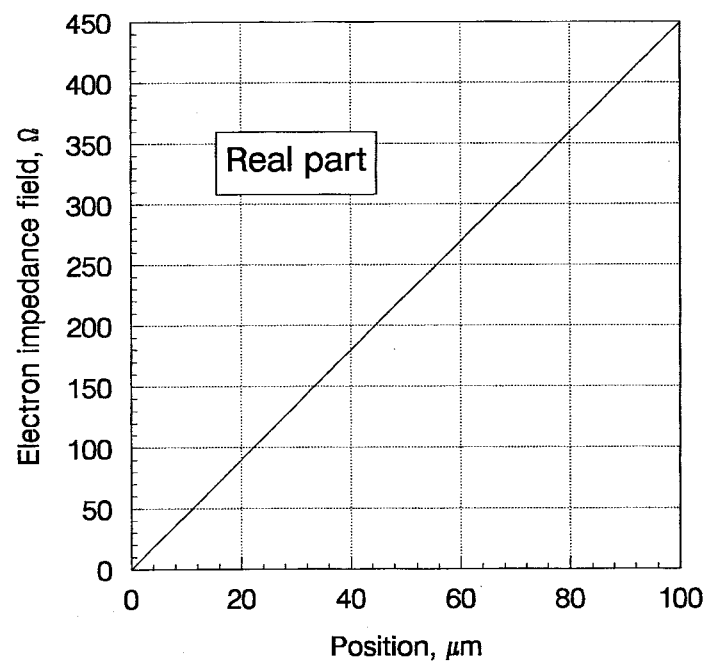


Figura 4.3. Parte reale del campo di impedenza scalare per gli elettroni nel caso del resistore 1D. La polarizzazione è  $V_d = 1$  V e la frequenza è  $f = 1$  MHz.

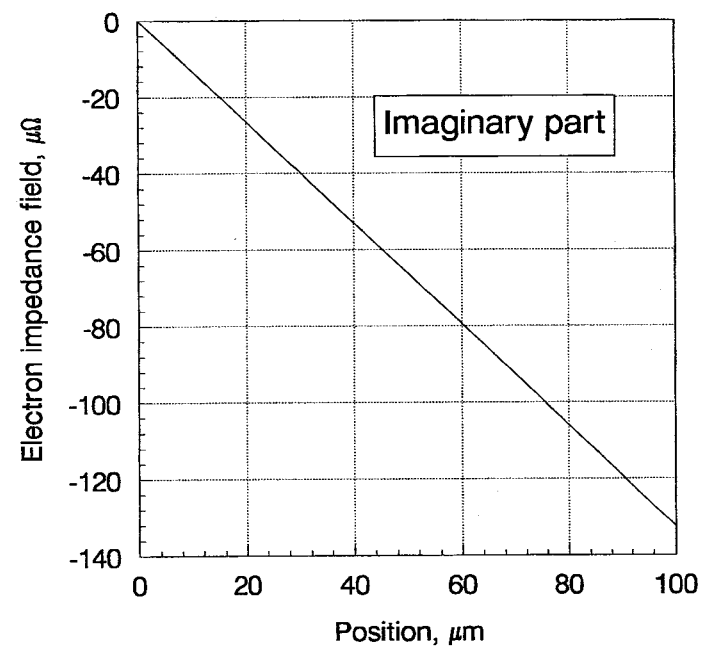


Figura 4.4. Parte immaginaria del campo di impedenza scalare per gli elettroni nel caso del resistore 1D. La polarizzazione è  $V_d = 1$  V e la frequenza è  $f = 1$  MHz.

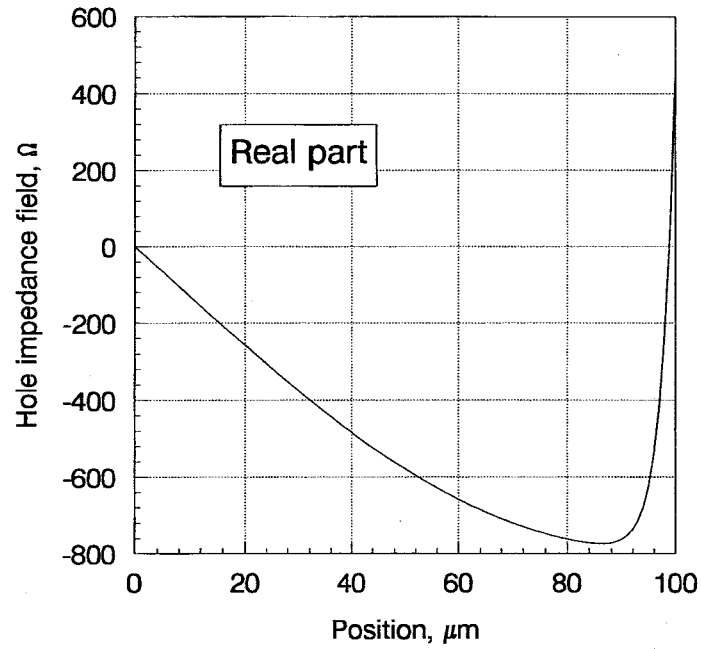


Figura 4.5. Parte reale del campo di impedenza scalare per le lacune nel caso del resistore 1D. La polarizzazione è  $V_d = 1$  V e la frequenza è  $f = 1$  MHz.

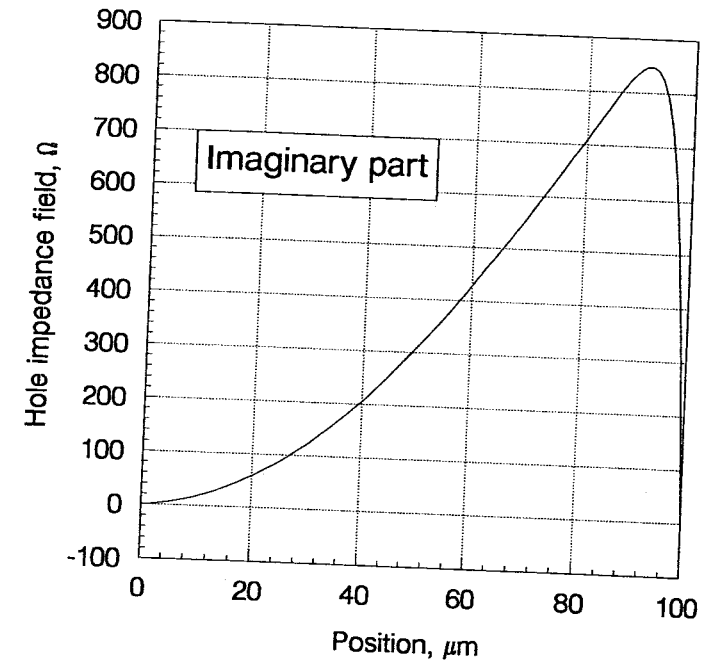


Figura 4.6. Parte immaginaria del campo di impedenza scalare per le lacune nel caso del resistore 1D. La polarizzazione è  $V_d = 1$  V e la frequenza è  $f = 1$  MHz.

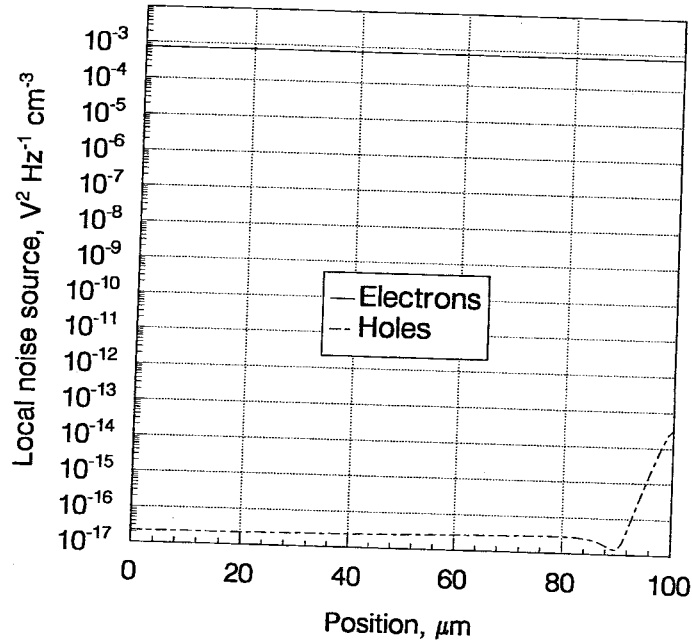


Figura 4.7. Sorgente locale di rumore per gli elettroni e le lacune nel caso del resistore 1D. La polarizzazione è  $V_d = 1$  V e la frequenza è  $f = 1$  MHz.

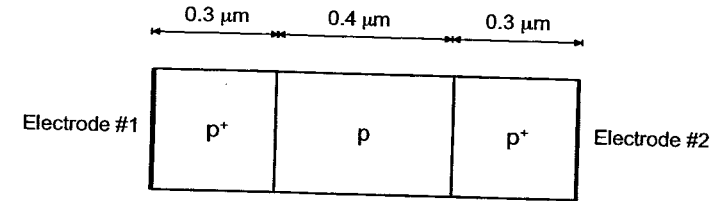


Figura 4.8. Struttura del diodo  $p^+pp^+$ .

### 4.3 Il diodo $p^+pp^+$ 1D

In ordine di complessità crescente, il dispositivo che segue un campione uniformemente drogato è costituito da un campione a drogaggio non costante, ma uniforme a tratti. In particolare, si è simulata una struttura 1D di silicio costituita da due giunzioni  $p^+p$ , in modo tale da ottenere un diodo  $p^+pp^+$ . Lo schema di tale dispositivo è rappresentato in Fig. 4.8, dove sono anche indicate le relative dimensioni fisiche: le regioni  $p^+$  hanno una lunghezza di  $0,3 \mu\text{m}$ , mentre la regione poco drogata centrale è lunga  $0,4 \mu\text{m}$ .

Allo scopo di confrontare i risultati ottenuti dal modello di trasporto drift diffusion con quelli ottenuti dalla soluzione diretta dell'equazione di Boltzmann per mezzo dello Scattered Packet Method [60, 61], e da un modello di trasporto idrodinamico completo [29, 59], la relazione velocità-campo elettrico delle lacune implementata del modello drift-diffusion è stata approssimata con il modello di Caughey e Thomas [69]:

$$\mu(E) = \mu_0 \left\{ 1 + \left[ \frac{\mu_0 E}{v_{\text{sat}}} \right]^\gamma \right\}^{-1/\gamma}, \quad (4.4)$$

i cui parametri sono stati calcolati in modo da ottenere risultati il più possibile in accordo con quelli dello Scattered Packed Method. La stessa approssimazione è stata utilizzata nelle simulazioni con il modello di trasporto idrodinamico. Da questa procedura di *fitting* si è ottenuta una mobilità di basso campo per le lacune pari a  $\mu_0 = 326 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ , una velocità di saturazione  $v_{\text{sat}} = 9,3 \times 10^6 \text{ cm/s}$  e un coefficiente  $\gamma = 1$ . Il confronto tra il risultato numerico e il modello analitico è mostrato in Fig. 4.9

Sono state simulate due diverse strutture: una con drogaggio  $N_{A+} = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$  nella regione  $p^+$  e  $N_A = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  nella regione  $p$  (indicata con "low doping" nei grafici), e una con drogaggio più intenso:  $N_{A+} = 4 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$

nella regione  $p^+$  e  $N_A = 4 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  nella regione  $p$  (indicata con "high doping"). In entrambi i casi, la caratteristica tensione-corrente valutata in condizioni statiche dalla simulazione drift-diffusion è rappresentata in Fig. 4.10, dove i cerchi indicano le polarizzazioni per cui è stato calcolato il campo di impedenza delle lacune.

Nel caso del dispositivo a drogaggio inferiore, il modulo al quadrato del campo di impedenza vettoriale delle lacune per unità di superficie è rappresentato in Fig. 4.11 per una polarizzazione di 0,6 V e una frequenza di lavoro di 1 GHz. La curva a tratto continuo rappresenta la soluzione del modello drift-diffusion, i cerchi sono i valori calcolati con lo Scattered Packet Method e le croci sono i punti ottenuti dal modello di trasporto idrodinamico. L'accordo tra i tre metodi è eccellente su tutta la lunghezza del dispositivo. Alla frequenza di 235 GHz (Fig. 4.12), il modello drift-diffusion e lo Scattered Packet Method danno valori ancora in ottimo accordo.

Risultati analoghi si ottengono per la struttura a drogaggio maggiore sia alla polarizzazione di 0,6 V (Fig. 4.13 per la frequenza di 1 GHz, Fig. 4.14 per la frequenza di 235 GHz) che per  $V_d = 2$  V. In quest'ultimo caso, la simulazione alla frequenza di 1 GHz è rappresentata in Fig. 4.15, mentre per quella a 235 GHz si veda la Fig. 4.16.

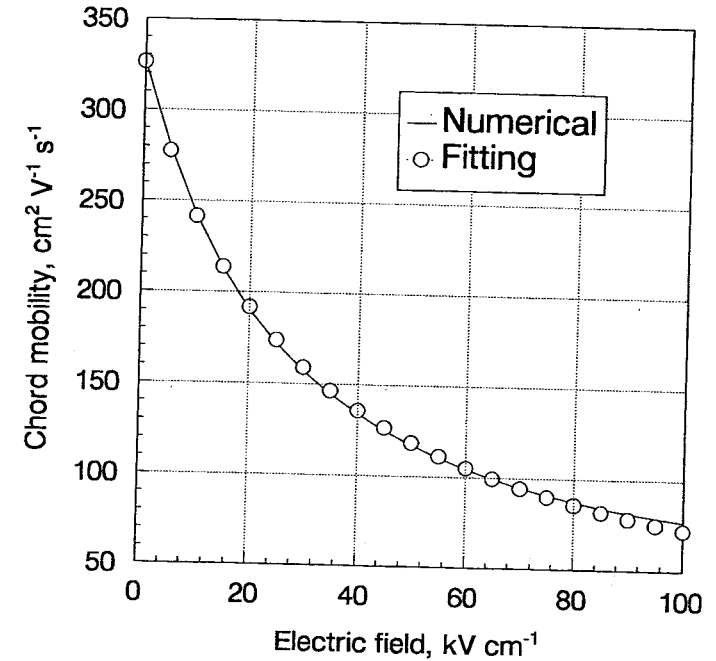


Figura 4.9. Confronto tra la dipendenza dal campo elettrico della mobilità delle lacune calcolata dall'equazione di Boltzmann con lo Scattered Packet Method e con il modello della (4.4). Nel modello, la mobilità di basso campo vale  $\mu_0 = 326 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ , la velocità di saturazione vale  $v_{\text{sat}} = 9,3 \times 10^6 \text{ cm/s}$  e  $\gamma = 1$ . La simulazione numerica è stata condotta per un drogaggio uniforme pari a  $N_A = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ .

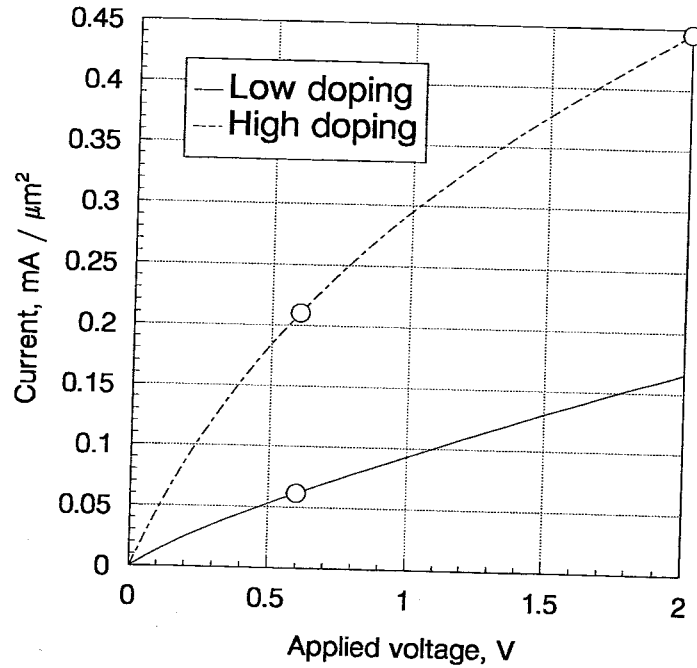


Figura 4.10. Caratteristica tensione corrente del diodo  $p^+pp^+$ . La curva indicata da "low doping" corrisponde a  $N_{A+} = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$  e  $N_A = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ , mentre la curva "high doping" corrisponde a  $N_{A+} = 4 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$  e  $N_A = 4 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . I cerchi indicano i punti di lavoro per cui è stata condotta l'analisi di rumore.

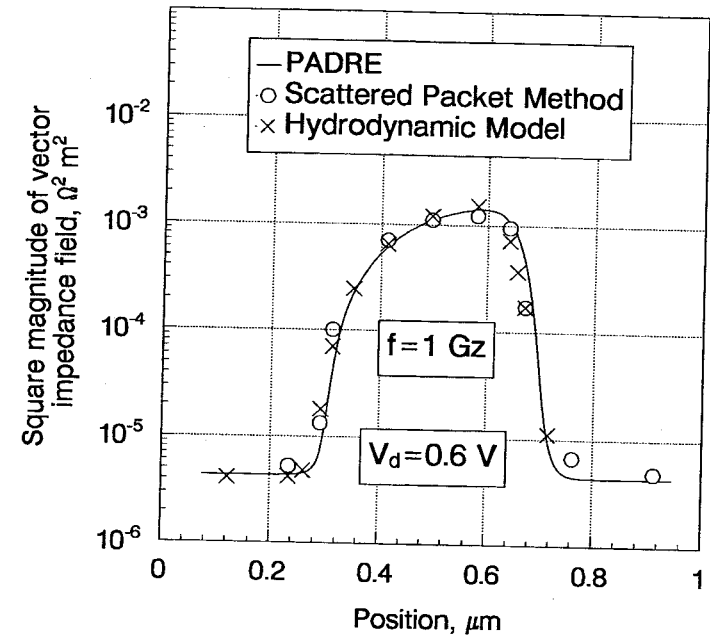


Figura 4.11. Confronto tra il modulo al quadrato del campo di impedenza vettoriale per le lacune calcolato con lo Scattered Packet Method, un modello di trasporto idrodinamico e il simulatore PADRE. Il drogaggio delle regioni  $p^+$  è  $N_{A+} = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ , mentre per le regioni  $p$  vale  $N_A = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . La polarizzazione vale  $V_d = 0,6 \text{ V}$ , mentre la frequenza è  $f = 1 \text{ GHz}$ .

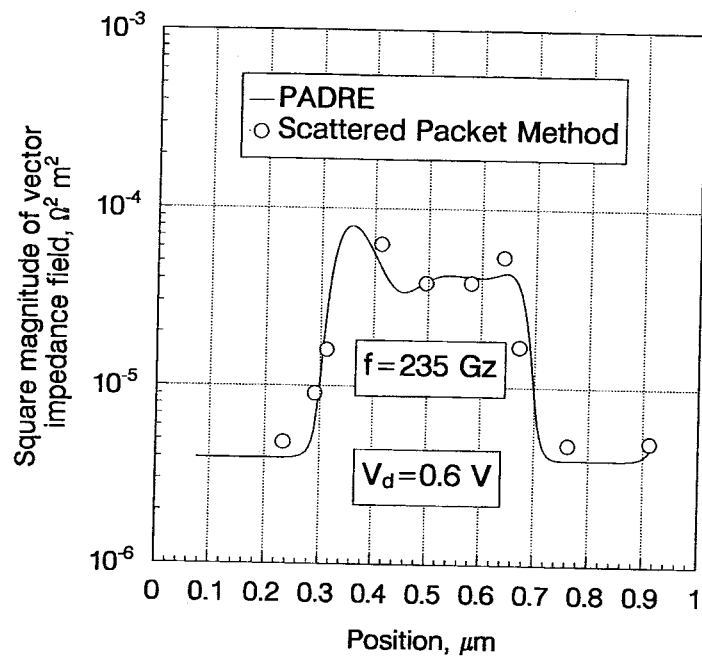


Figura 4.12. Confronto tra il modulo al quadrato del campo di impedenza vettoriale per le lacune calcolato con lo Scattered Packet Method e il simulatore PADRE. Il drogaggio delle regioni  $p^+$  è  $N_{A+} = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ , mentre per le regioni  $p$  vale  $N_A = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . La polarizzazione vale  $V_d = 0,6 \text{ V}$ , mentre la frequenza è  $f = 235 \text{ GHz}$ .

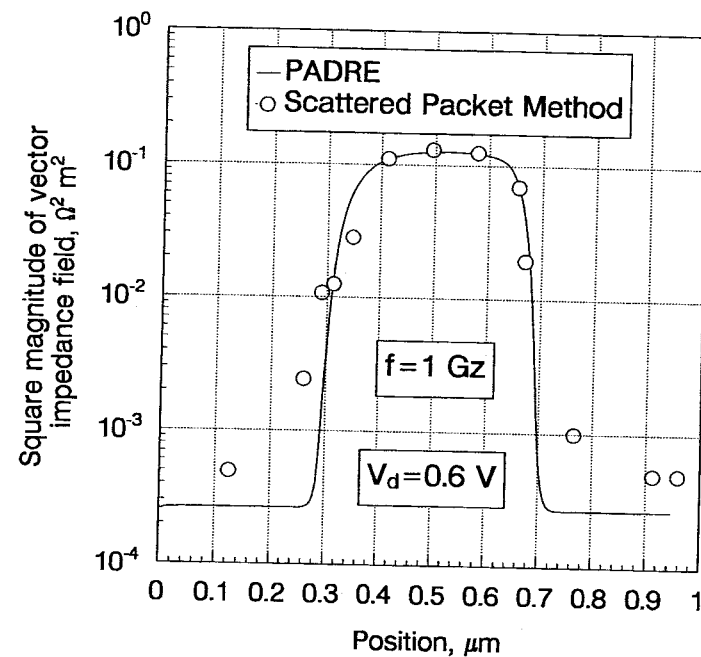


Figura 4.13. Confronto tra il modulo al quadrato del campo di impedenza vettoriale per le lacune calcolato con lo Scattered Packet Method e il simulatore PADRE. Il drogaggio delle regioni  $p^+$  è  $N_{A+} = 4 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ , mentre per le regioni  $p$  vale  $N_A = 4 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . La polarizzazione vale  $V_d = 0,6 \text{ V}$ , mentre la frequenza è  $f = 1 \text{ GHz}$ .



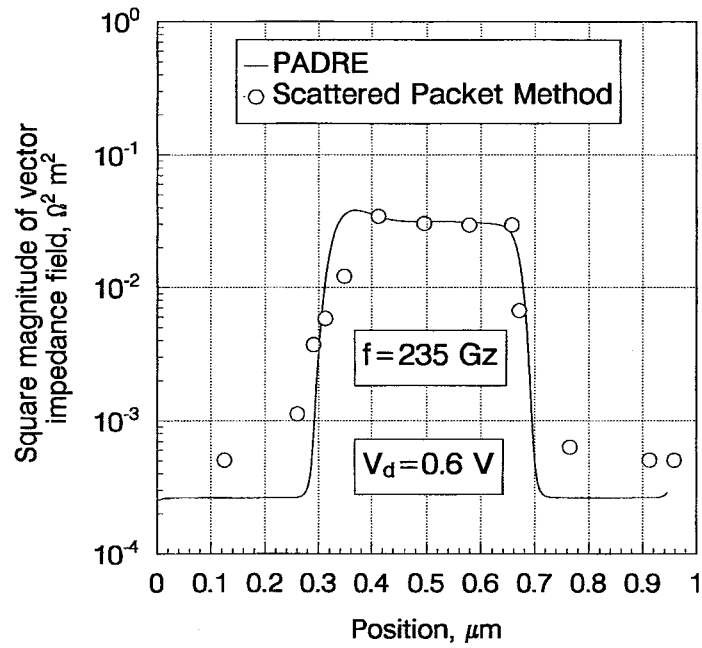


Figura 4.14. Confronto tra il modulo al quadrato del campo di impedenza vettoriale per le lacune calcolato con lo Scattered Packet Method e il simulatore PADRE. Il drogaggio delle regioni  $p^+$  è  $N_{A+} = 4 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ , mentre per le regioni  $p$  vale  $N_A = 4 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . La polarizzazione vale  $V_d = 0,6 \text{ V}$ , mentre la frequenza è  $f = 235 \text{ GHz}$ .

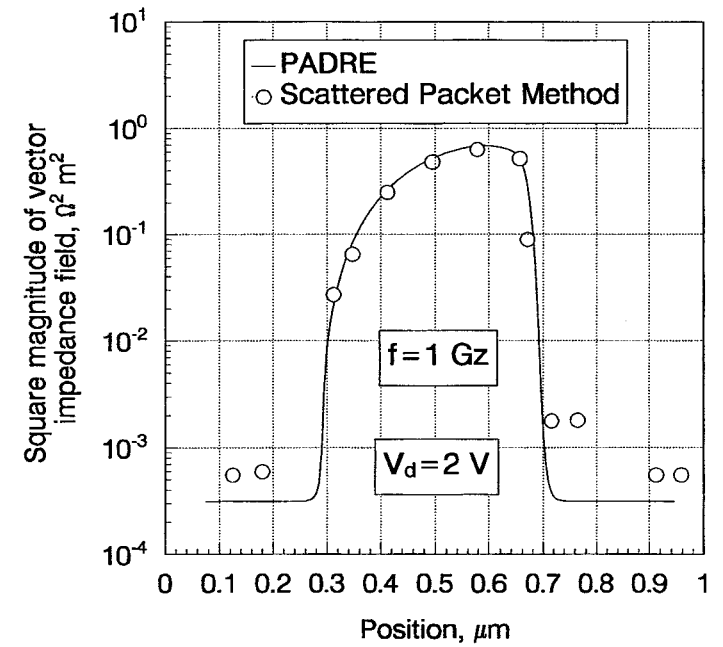


Figura 4.15. Confronto tra il modulo al quadrato del campo di impedenza vettoriale per le lacune calcolato con lo Scattered Packet Method e il simulatore PADRE. Il drogaggio delle regioni  $p^+$  è  $N_{A+} = 4 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ , mentre per le regioni  $p$  vale  $N_A = 4 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . La polarizzazione vale  $V_d = 2 \text{ V}$ , mentre la frequenza è  $f = 1 \text{ GHz}$ .

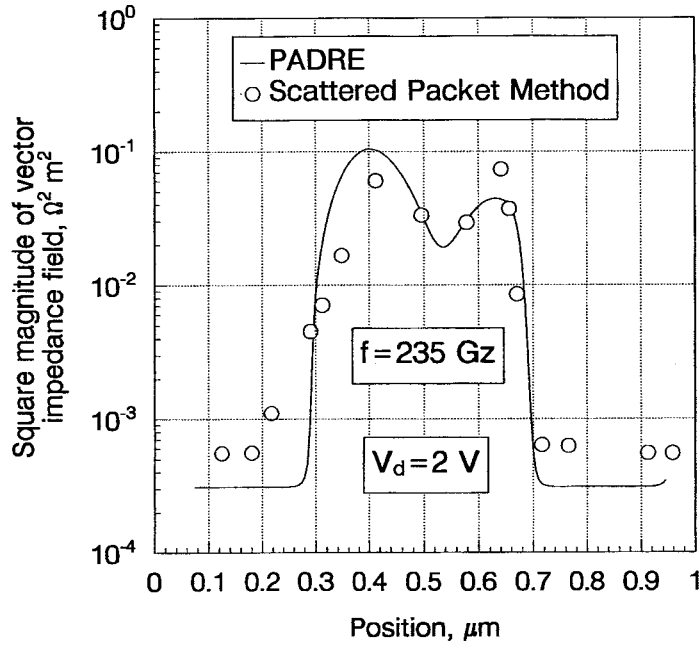


Figura 4.16. Confronto tra il modulo al quadrato del campo di impedenza vettoriale per le lacune calcolato con lo Scattered Packet Method e il simulatore PADRE. Il drogaggio delle regioni  $p^+$  è  $N_{A+} = 4 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ , mentre per le regioni  $p$  vale  $N_A = 4 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . La polarizzazione vale  $V_d = 2 \text{ V}$ , mentre la frequenza è  $f = 235 \text{ GHz}$ .

## 4.4 Il diodo pn 1D

Questa sezione descrive le proprietà di rumore di una struttura in cui una analisi bipolare è assolutamente indispensabile: un diodo  $pn$  monodimensionale. Il diodo preso in esame è costituito da una giunzione in silicio brusca e simmetrica, con i due lati lunghi  $5 \mu\text{m}$  e drogati  $N_D = N_A = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . La sezione trasversale è pari a  $1 \mu\text{m}^2$ . Per semplicità, la mobilità è stata assunta costante ai valori  $\mu_n = 1390 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$  e  $\mu_p = 470 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Inoltre sono stati trascurati tutti i fenomeni di generazione e ricombinazione. La caratteristica statica del diodo così ottenuto è rappresentata nella Fig. 4.17, mentre nella Fig. 4.18 si ha un confronto tra l'andamento in funzione della tensione di polarizzazione diretta applicata degli spettri della corrente di rumore di corto circuito valutati numericamente alla frequenza di  $10 \text{ kHz}$  e tramite la relazione teorica  $S_{i,i} = 2q(I_d + 2I_0)$ , essendo  $I_d$  la corrente di polarizzazione (diretta) che scorre nel diodo e  $I_0$  la corrente inversa di saturazione. Questa relazione ha la struttura di un *rumore shot* (§ A.2), in quanto il suo spettro di potenza è proporzionale al valore medio della corrente che attraversa la giunzione, ed è valida a frequenze non troppo elevate. L'interpretazione del rumore shot in un diodo è stata introdotta da van der Ziel [68] utilizzando la cosiddetta *teoria corpuscolare* del rumore, ma è poi stata dimostrata rigorosamente da van Vliet [39] nell'ambito del formalismo della funzione di Green nell'ipotesi di bassa iniezione. Infatti, si può dimostrare per una giunzione arbitraria che, in bassa iniezione, lo spettro della corrente di rumore di corto circuito è dato da:

$$S_{i,i} = -2qI_d + 4kT \text{Re}\{Y_d\} \quad (4.5)$$

essendo  $Y_d$  l'ammettenza di piccolo segnale del diodo. La (4.5) può essere espressa in funzione della corrente inversa  $I_0$  ricordando che, in bassa iniezione, la caratteristica statica del diodo è data da:

$$I_d = I_0 (e^{qV_d/kT} - 1) \quad (4.6)$$

da cui si ricava:

$$\text{Re}\{Y_d\} = \frac{\partial I_d}{\partial V_d} = \frac{q}{kT} (I_d + I_0). \quad (4.7)$$

Sostituendo nella (4.5), si ottiene:

$$S_{i,i} = 2q(I_d + 2I_0). \quad (4.8)$$

Si noti che la (4.5) non è definita positiva: infatti ad alta iniezione il termine di tipo shot tende a dominare, rendendo l'equazione non più utilizzabile. La (4.8), invece, continua a essere una buona approssimazione dello spettro di rumore anche ad alta iniezione, come si vede chiaramente nella Fig. 4.18. In bassa iniezione, l'accordo tra la simulazione numerica e la teoria è eccellente.

Le parti reali dei campi di impedenza di elettroni e lacune sono rappresentate, per una frequenza di 10 kHz e una polarizzazione in bassa iniezione di 0,5 V, nelle Figg. 4.19 e 4.21, rispettivamente, mentre le rispettive parti immaginarie si trovano nelle Figg. 4.20 e 4.22. In accordo alle considerazioni teoriche in [41], il gradiente dei campi di impedenza in bassa iniezione è diverso da zero solo nelle regioni in cui i portatori a cui si riferiscono sono minoritari (il lato  $p$  per il campo degli elettroni e il lato  $n$  per il campo delle lacune). Ciò significa che, in bassa iniezione, contribuiscono al rumore solo i portatori minoritari di ogni regione, come si vede nella Fig. 4.27 che rappresenta le sorgenti locali di rumore di elettroni e lacune in bassa iniezione.

Queste considerazioni perdono validità ad alta iniezione. Infatti, i campi di impedenza vettoriali sono diversi da zero su tutto il dispositivo, sia per le parti reali (Fig. 4.23 per gli elettroni, Fig. 4.25 per le lacune) che per quelle immaginarie (Fig. 4.24 per gli elettroni, Fig. 4.26 per le lacune), e quindi le corrispondenti sorgenti locali di rumore sono distribuite sull'intero dominio (Fig. 4.28). Le simulazioni ora citate sono state condotte per una polarizzazione di 0,8 V e una frequenza di 10 kHz.

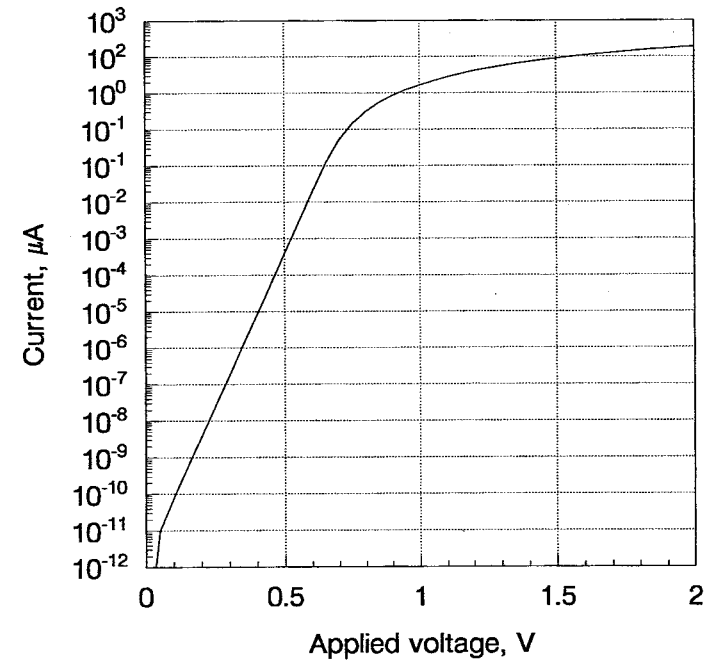


Figura 4.17. Caratteristica tensione corrente del diodo 1D.

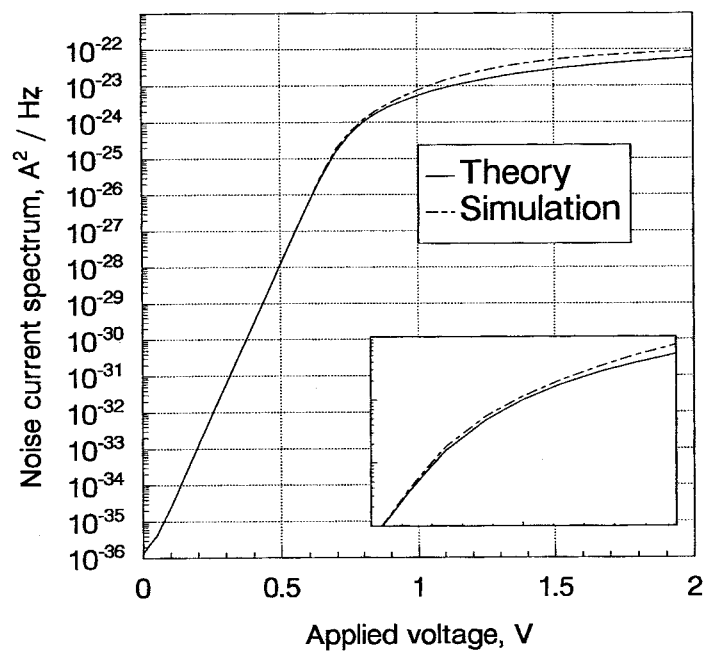


Figura 4.18. Confronto tra il valore simulato e quello teorico dello spettro della corrente di rumore del diodo 1D in funzione della tensione di polarizzazione.

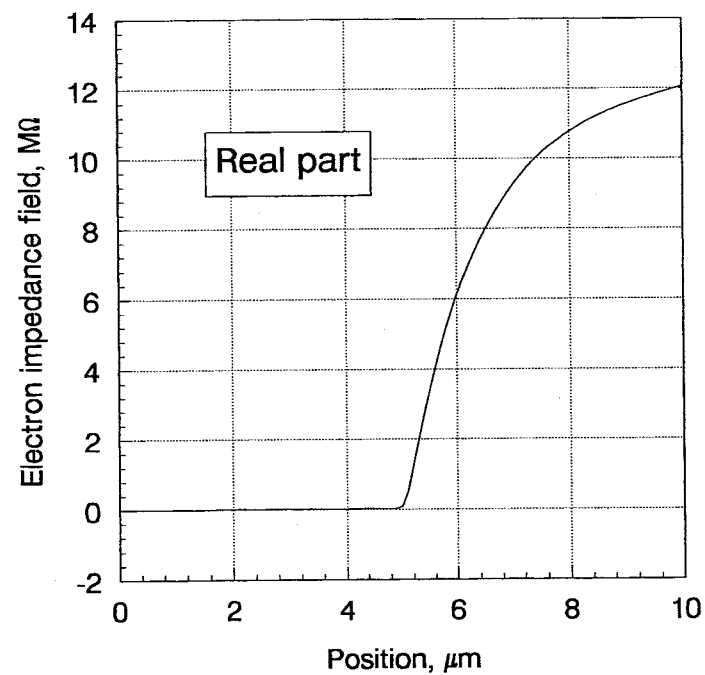


Figura 4.19. Parte reale del campo di impedenza scalare per gli elettroni nel caso del diodo 1D. La polarizzazione è  $V_d = 0,5$  V e la frequenza è  $f = 10$  kHz.

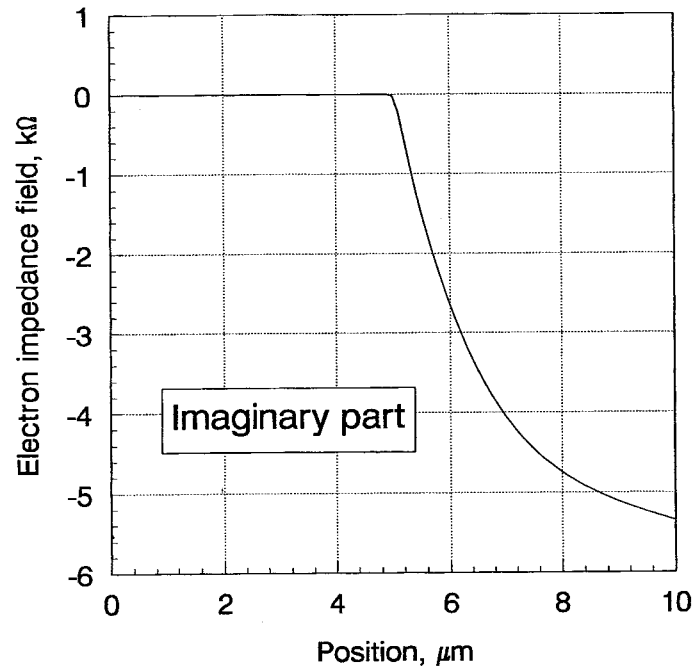


Figura 4.20. Parte immaginaria del campo di impedenza scalare per gli elettroni nel caso del diodo 1D. La polarizzazione è  $V_d = 0,5$  V e la frequenza è  $f = 10$  kHz.

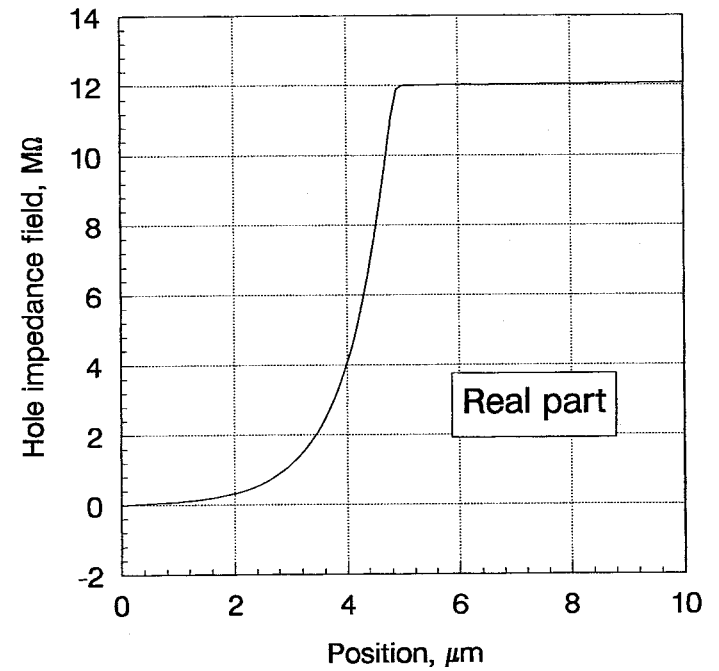


Figura 4.21. Parte reale del campo di impedenza scalare per le lacune nel caso del diodo 1D. La polarizzazione è  $V_d = 0,5$  V e la frequenza è  $f = 10$  kHz.

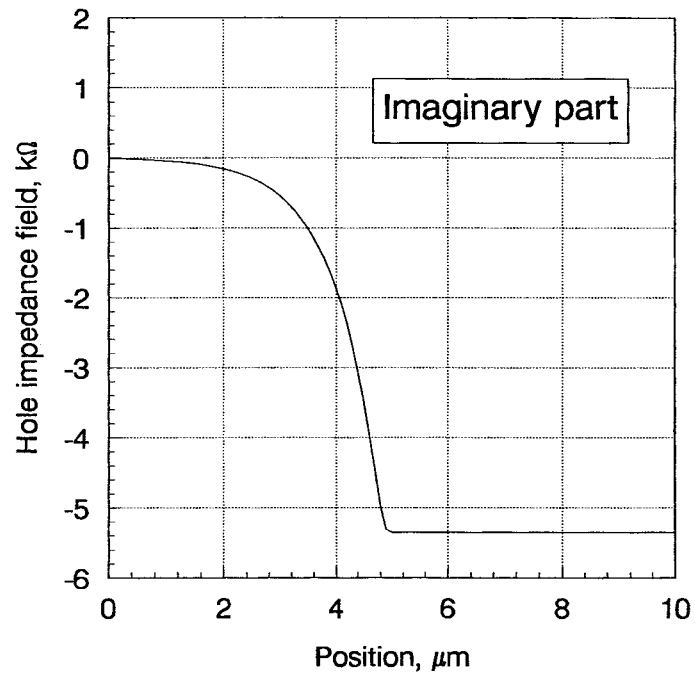


Figura 4.22. Parte immaginaria del campo di impedenza scalare per le lacune nel caso del diodo 1D. La polarizzazione è  $V_d = 0,5$  V e la frequenza è  $f = 10$  kHz.

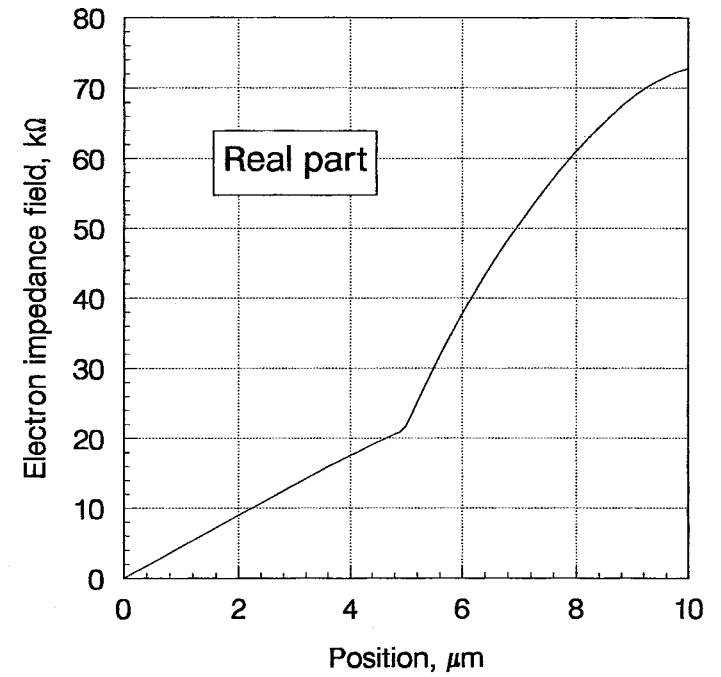


Figura 4.23. Parte reale del campo di impedenza scalare per gli elettroni nel caso del diodo 1D. La polarizzazione è  $V_d = 0,8$  V e la frequenza è  $f = 10$  kHz.

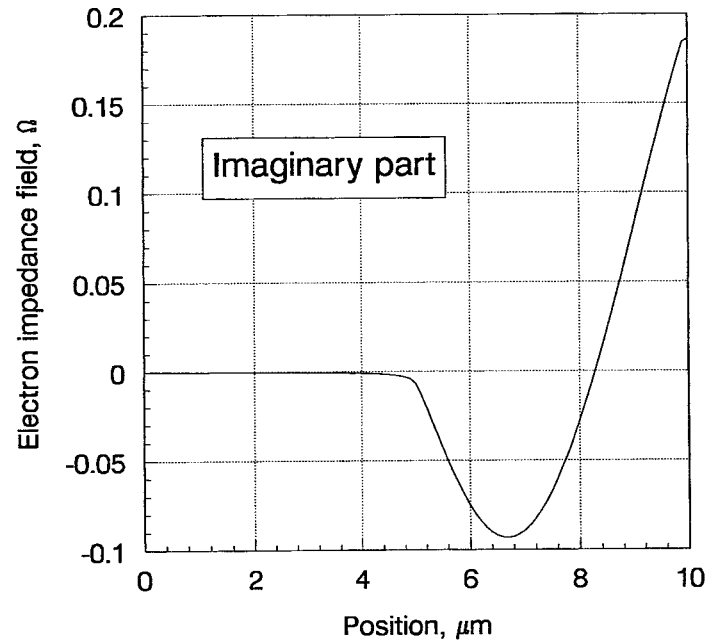


Figura 4.24. Parte immaginaria del campo di impedenza scalare per gli elettroni nel caso del diodo 1D. La polarizzazione è  $V_d = 0,8$  V e la frequenza è  $f = 10$  kHz.

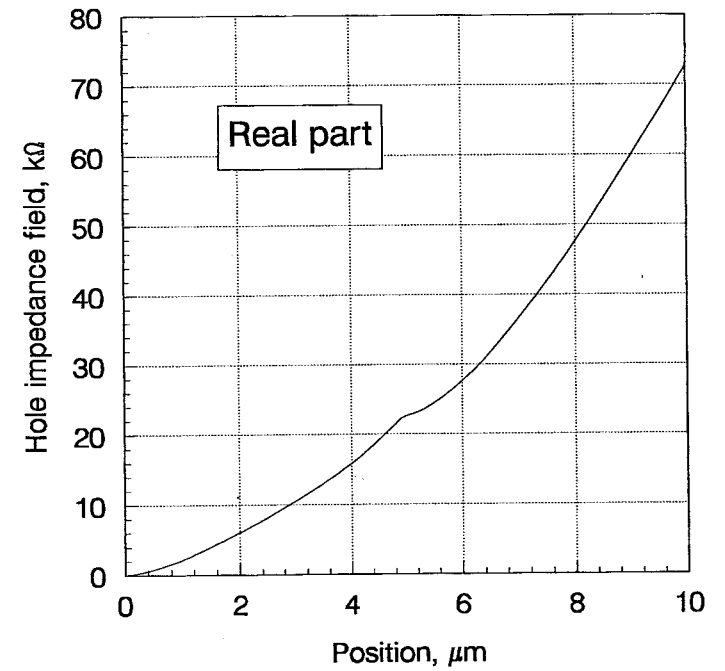


Figura 4.25. Parte reale del campo di impedenza scalare per le lacune nel caso del diodo 1D. La polarizzazione è  $V_d = 0,8$  V e la frequenza è  $f = 10$  kHz.

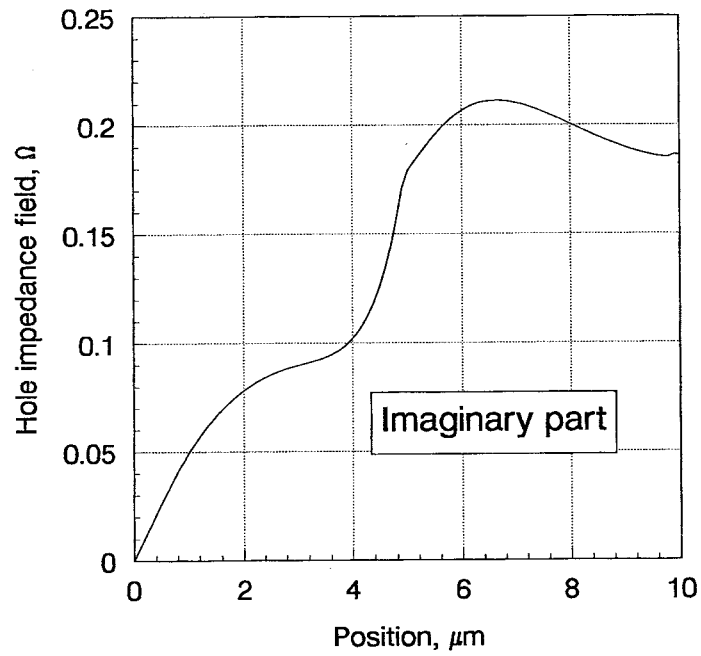


Figura 4.26. Parte immaginaria del campo di impedenza scalare per le lacune nel caso del diodo 1D. La polarizzazione è  $V_d = 0,8 \text{ V}$  e la frequenza è  $f = 10 \text{ kHz}$ .

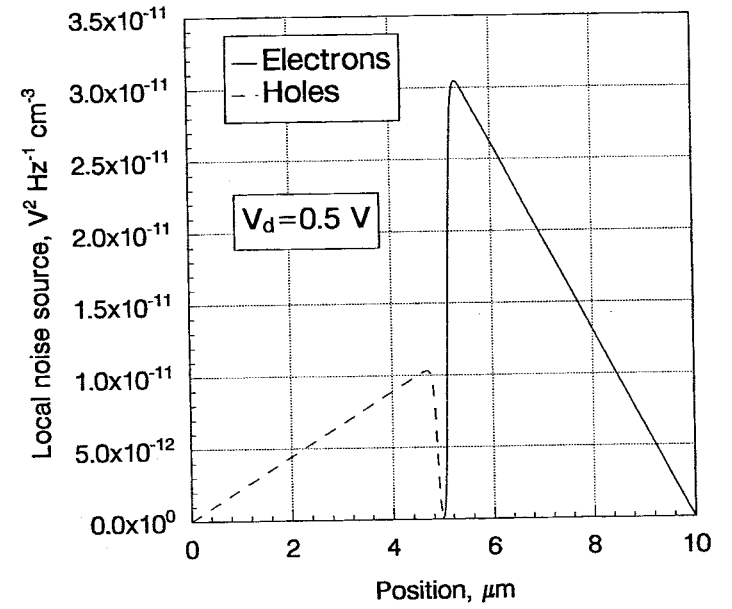


Figura 4.27. Sorgente locale di rumore per gli elettroni e le lacune nel caso del diodo 1D. La polarizzazione è  $V_d = 0,5 \text{ V}$  e la frequenza è  $f = 10 \text{ kHz}$ .



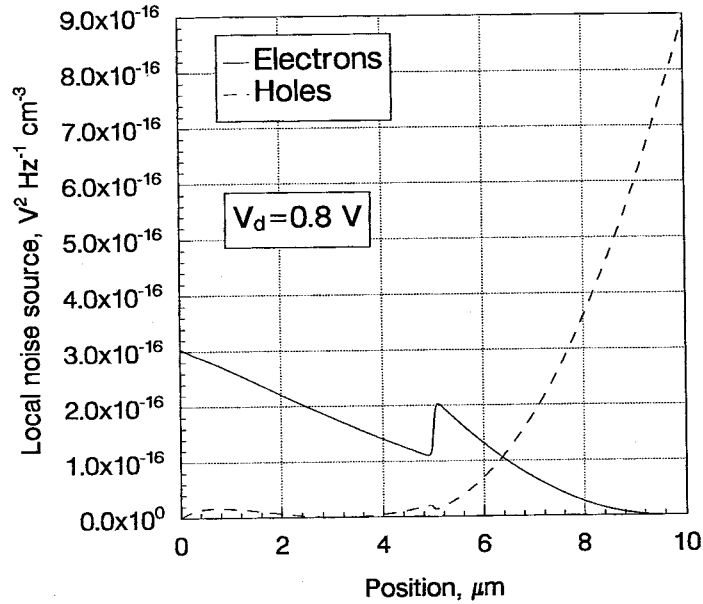


Figura 4.28. Sorgente locale di rumore per gli elettroni e le lacune nel caso del diodo 1D. La polarizzazione è  $V_d = 0,8$  V e la frequenza è  $f = 10$  kHz.

## 4.5 Il diodo pn 2D

L'esempio successivo, di complessità maggiore rispetto alla simulazione 1D di un diodo pn a giunzione brusca e simmetrica, è il caso di una giunzione impiantata 2D. Su un substrato di silicio drogato  $n$  con una concentrazione costante  $N_D = 2 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ , si è impiantata una dose di drogante di tipo  $p$  tale da determinare una concentrazione di picco  $N_{Ap} = 5 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$  e una giunzione alla profondità di  $0,5 \mu\text{m}$ . L'impiantazione viene effettuata su tutta la superficie del campione, ma è mascherata in modo tale da essere estesa su una lunghezza trasversale al flusso di corrente di  $1,2 \mu\text{m}$  rispetto a una ampiezza complessiva di  $3 \mu\text{m}$  (Fig. 4.29). La struttura ha una dimensione ortogonale al piano di simulazione di  $1 \mu\text{m}$ . Anche in questo caso si sono trascurati i fenomeni di generazione e ricombinazione, mentre la mobilità, costante al valore di basso campo, vale  $\mu_n = 1390 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$  per gli elettroni e  $\mu_p = 470 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$  per le lacune.

Vista la simmetria rispetto all'asse longitudinale al flusso di corrente, è sufficiente simulare solo metà del diodo. Il grigliato utilizzato nella simulazione è rappresentato in Fig. 4.30, mentre la Fig. 4.31 contiene la corrispondente caratteristica tensione corrente in condizioni di regime stazionario. Anche in questo caso, l'andamento in funzione della tensione di polarizzazione dello spettro del generatore di corrente di rumore di corto circuito (Fig. 4.32) è in eccellente accordo con la relazione teorica (4.8) in bassa iniezione, mentre alcune differenze si manifestano in regime di alta iniezione, dove d'altro canto le ipotesi alla base della trattazione teorica stessa cessano di avere validità; comunque, la riduzione dello spettro di rumore simulato rispetto al valore ottenuto dalla teoria corpuscolare ad altissima iniezione è stata prevista qualitativamente in [41, 42].

In accordo con quanto già osservato per il diodo monodimensionale, i campi di impedenza vettoriale sono, in bassa iniezione (polarizzazione pari a  $0,5$  V e frequenza di lavoro  $10$  kHz), diversi da zero solo nelle regioni in cui i portatori cui si riferiscono sono minoritari: si vedano le Figg. 4.33 e 4.34, per la parte reale del campo di impedenza scalare degli elettroni e delle lacune, rispettivamente. Le parti immaginarie dei campi di impedenza non sono state riportate perché il loro valore, come già osservato nel caso del diodo 1D, è del tutto trascurabile rispetto alle parti reali. Comunque, anche il loro andamento riflette quello della simulazione 1D. In accordo con queste considerazioni, la sorgente locale di rumore è, in bassa iniezione, dovuta ai soli

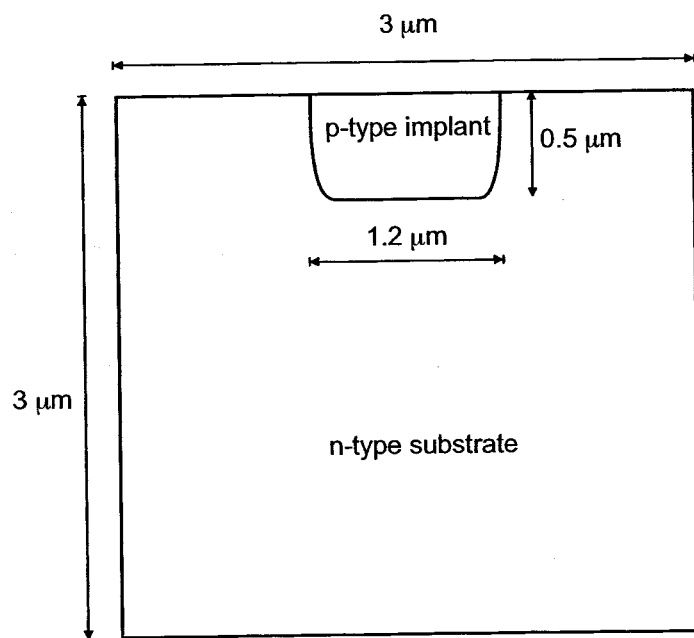


Figura 4.29. Schema del diodo impiantato 2D.

portatori minoritari, come si vede chiaramente nella Fig. 4.37 che mostra una sezione di tali sorgenti locali lungo un asse parallelo al flusso della corrente e posto a una distanza di  $0,25 \mu\text{m}$  dal centro dell'impiantazione. Si noti come l'andamento delle due curve sia diverso dal caso 1D: infatti in questo caso il drogaggio non è più costante, ma ha un profilo gaussiano.

Le Figg. 4.35 e 4.36 rappresentano, rispettivamente, la parte reale del campo di impedenza scalare degli elettroni e delle lacune in condizioni di alta iniezione, cioè per una polarizzazione di  $0,8 \text{ V}$  e una frequenza di  $10 \text{ kHz}$ . Come per il diodo 1D, il campo di impedenza vettoriale di elettroni e lacune è diverso da zero in tutto il dominio del dispositivo, e quindi l'ipotesi fondamentale della trattazione teorica, secondo la quale il rumore è dovuto ai soli portatori minoritari di ogni regione, non è più soddisfatta. A conferma di ciò, si veda la Fig. 4.38, che rappresenta una sezione ortogonale alla giunzione

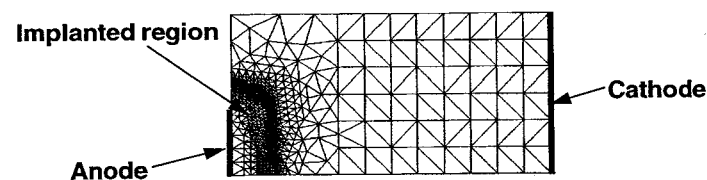


Figura 4.30. Grigliato utilizzato nella simulazione del diodo impiantato 2D.

delle sorgenti locali di rumore per gli elettroni e le lacune.

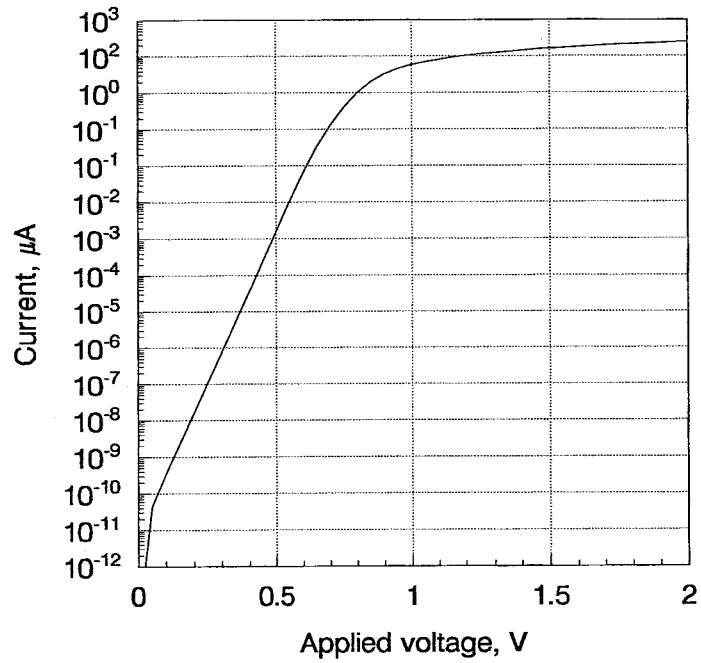


Figura 4.31. Caratteristica tensione corrente del diodo 2D.

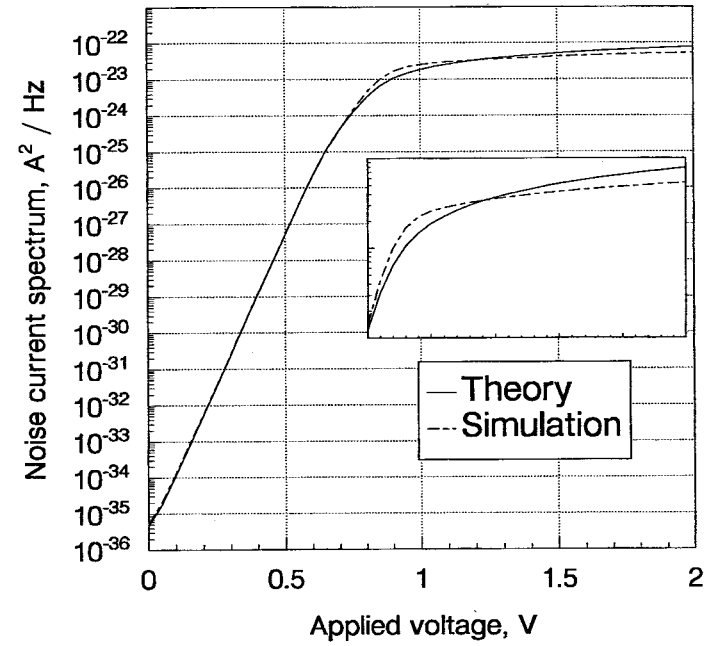


Figura 4.32. Confronto tra il valore simulato e quello teorico dello spettro della corrente di rumore del diodo 2D in funzione della tensione di polarizzazione.

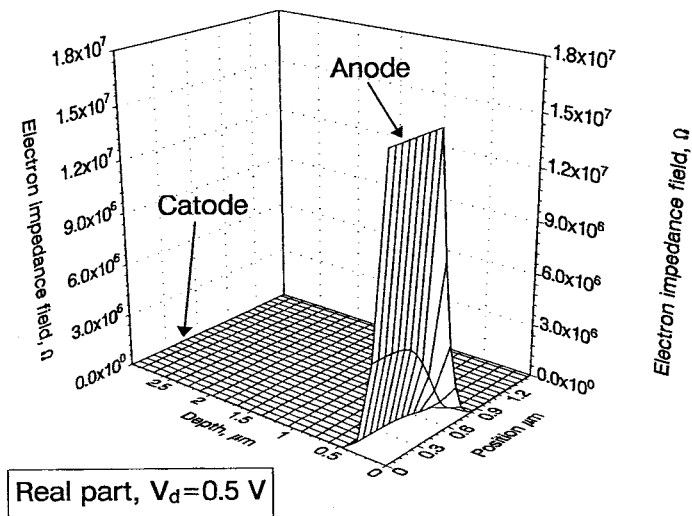


Figura 4.33. Parte reale del campo di impedenza scalare per gli elettroni nel caso del diodo 2D. La polarizzazione è  $V_d = 0,5$  V e la frequenza è  $f = 10$  kHz.

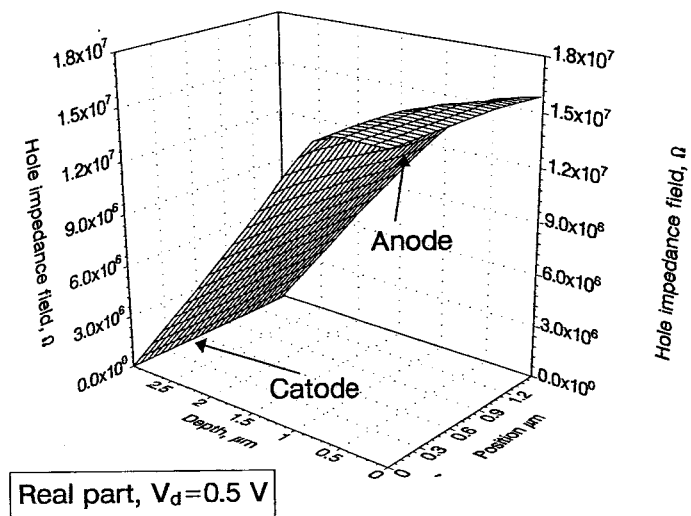


Figura 4.34. Parte reale del campo di impedenza scalare per le lacune nel caso del diodo 2D. La polarizzazione è  $V_d = 0,5$  V e la frequenza è  $f = 10$  kHz.

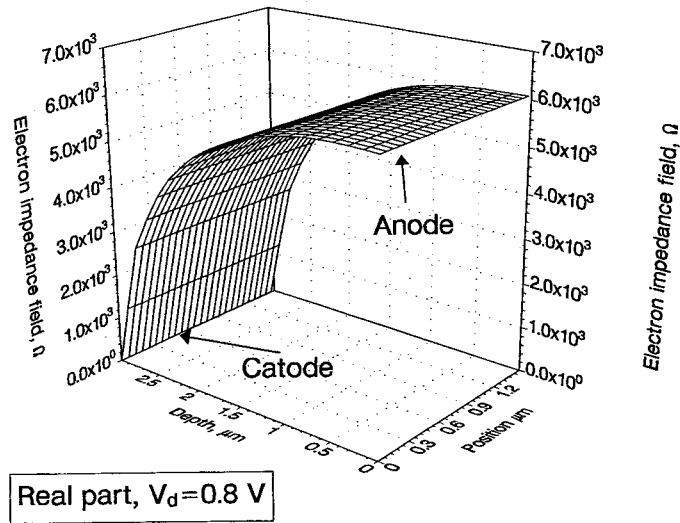


Figura 4.35. Parte reale del campo di impedenza scalare per gli elettroni nel caso del diodo 2D. La polarizzazione è  $V_d = 0,8$  V e la frequenza è  $f = 10$  kHz.

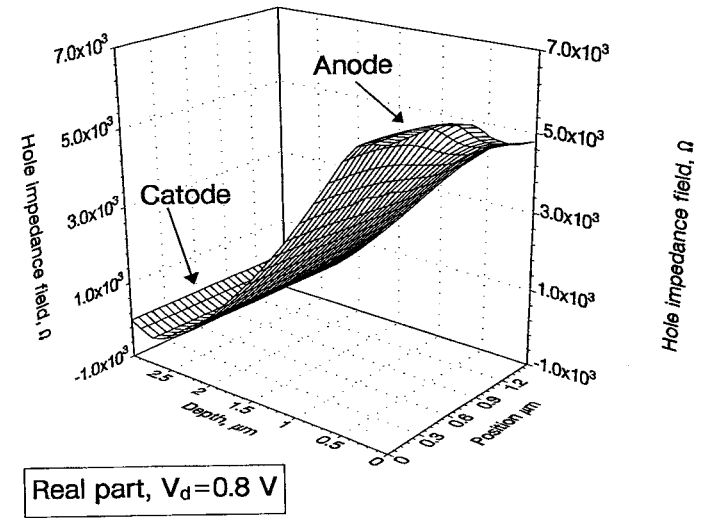


Figura 4.36. Parte reale del campo di impedenza scalare per le lacune nel caso del diodo 2D. La polarizzazione è  $V_d = 0,8$  V e la frequenza è  $f = 10$  kHz.

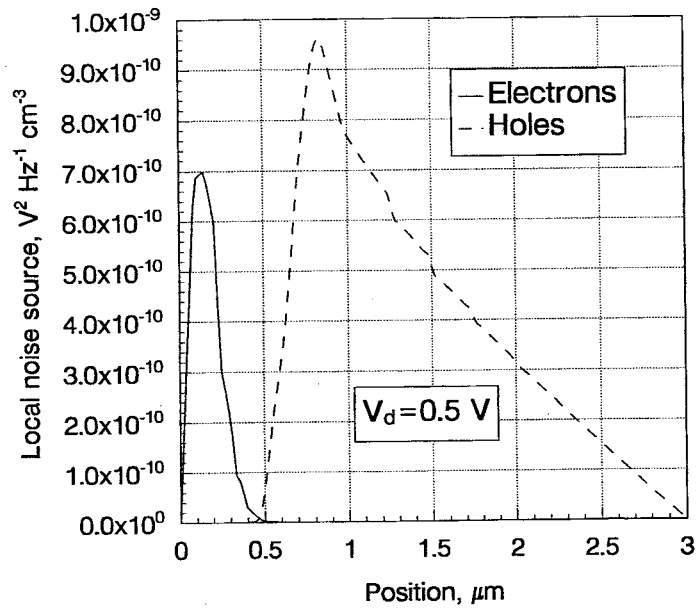


Figura 4.37. Sezione al centro della giunzione *pn* della sorgente locale di rumore per gli elettroni e le lacune nel caso del diodo 2D. La polarizzazione è  $V_d = 0,5$  V e la frequenza è  $f = 10$  kHz.

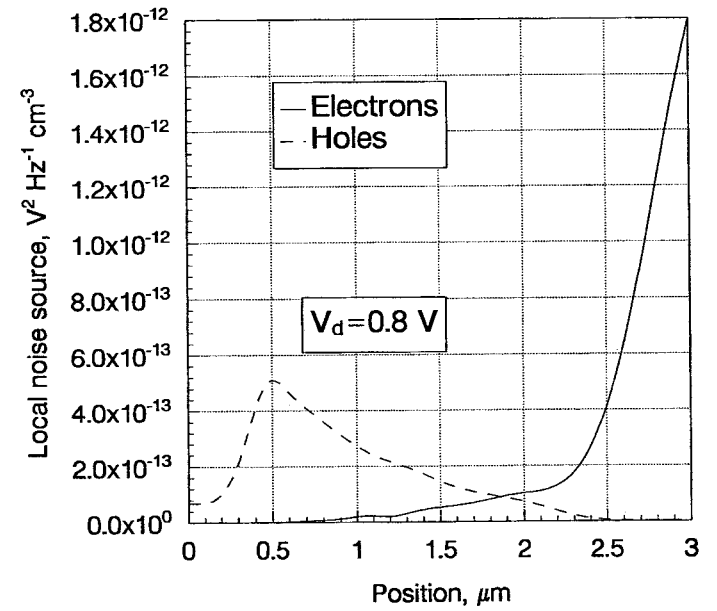


Figura 4.38. Sezione al centro della giunzione *pn* della sorgente locale di rumore per gli elettroni e le lacune nel caso del diodo 2D. La polarizzazione è  $V_d = 0,5$  V e la frequenza è  $f = 10$  kHz.

## 4.6 Il due-porte resistivo

Il più semplice esempio di struttura a due porte è il caso di un campione di materiale semiconduttore uniformemente drogato al quale siano applicati tre contatti ohmici. Tale struttura costituisce un due-porte resistivo che, in equilibrio termodinamico, deve soddisfare la relazione di Nyquist:

$$\underline{S}_{v,v} = 2kT (\underline{Z} + \underline{Z}^\dagger), \quad (4.9)$$

dove  $\underline{Z}$  è la matrice di impedenza di piccolo segnale che rappresenta il due-porte e “†” indica il coniugato hermitiano.

La struttura simulata, rappresentata in Fig. 4.39, ha una lunghezza di 3  $\mu\text{m}$  e una larghezza di 1  $\mu\text{m}$ , mentre la dimensione ortogonale al piano di simulazione è stata posta pari a 1  $\mu\text{m}$ . Si è supposto che il dispositivo sia realizzato in silicio, con una mobilità costante al valore di basso campo e pari a  $\mu_n = 1390 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$  per gli elettroni e  $\mu_p = 470 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$  per le lacune, e con un drogaggio uniforme pari a  $N_D = 2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ . Sempre con riferimento alla Fig. 4.39, il contatto 2 è posto al centro del dispositivo e ha una lunghezza di 1  $\mu\text{m}$ . L'elettrodo collegato a massa è il contatto 1.

Le simulazioni sono state condotte per una frequenza di 10 kHz e per due diverse polarizzazioni. In equilibrio termodinamico, dove gli spettri di correlazione dei generatori di tensione di rumore di circuito aperto soddisfano la relazione di Nyquist (4.9), i campi di impedenza di elettroni e lacune sono identici: le Figg. 4.40 e 4.41 sono relative alle parti reali dei campi di impedenza per elettroni e lacune del contatto 2, mentre le parti reali dei campi di impedenza per elettroni e lacune del contatto 3 sono rappresentate nelle Figg. 4.42 e 4.43. Le parti immaginarie non vengono rappresentate perché il loro valore, a questa frequenza, è trascurabile. Gli andamenti dei campi di impedenza ammettono la seguente interpretazione fisica:

- per il contatto 2, il campo di impedenza scalare cresce linearmente per i punti di iniezione compresi tra i contatti 1 e 2, infatti in questa zona il dispositivo si comporta come una semplice resistenza, mentre è costante tra i contatti 2 e 3, dove una corrente iniettata risulta essere cortocircuitata dal contatto equipotenziale 2 (Figg. 4.40 e 4.41).
- per il contatto 3, il campo di impedenza scalare cresce linearmente in tutto il dominio del dispositivo, tranne per una deformazione nella

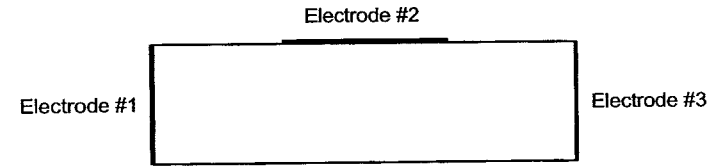
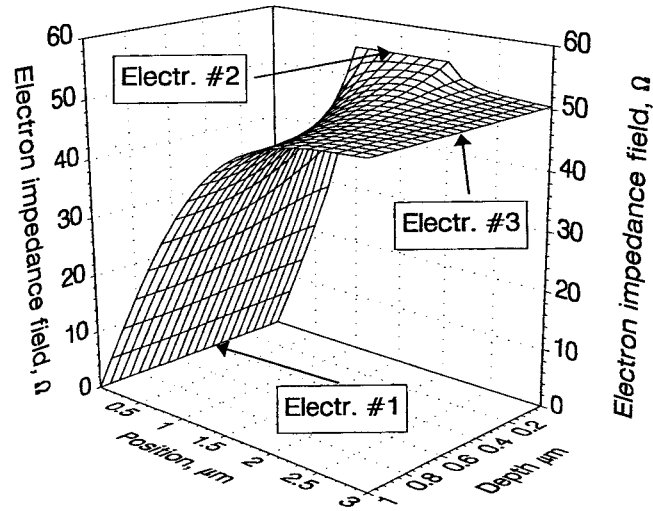


Figura 4.39. Struttura del due-porte resistivo.

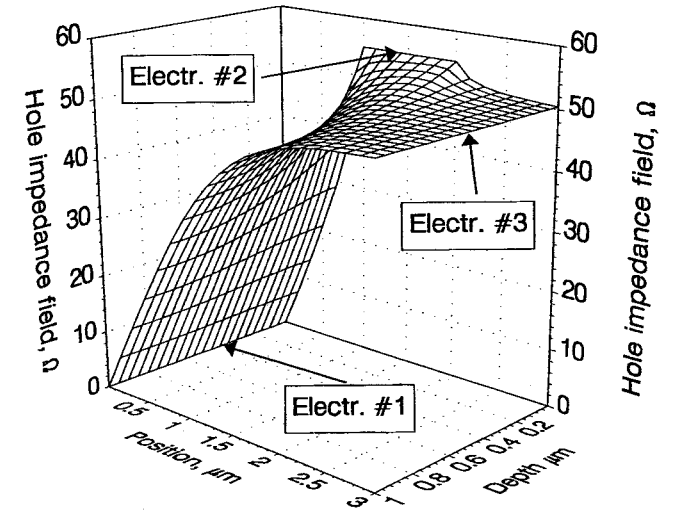
zona del contatto 2 imposta dall'equipotenzialità dei nodi afferenti a tale elettrodo (Figg. 4.42 e 4.43).

Polarizzando il due-porte con una tensione di 0,5 V sull'elettrodo 2 e di 1 V sull'elettrodo 3, i campi di impedenza scalari restano gli stessi dell'equilibrio termodinamico per i portatori di maggioranza, cioè gli elettroni (Fig. 4.44 per l'elettrodo 2, Fig. 4.46 per l'elettrodo 3), mentre risultano essere molto diversi per le lacune, come si vede nelle Figg. 4.45 (contatto 2) e 4.47 (contatto 3). Questo comportamento è in accordo con quello già osservato nel caso della simulazione 1D del resistore. Anche in questo caso, le parti immaginarie hanno un valore trascurabile rispetto alle componenti reali.



Real part, electrode #2

Figura 4.40. Parte reale del campo di impedenza scalare dell'elettrodo 2 per gli elettroni nel caso del due-porte resistivo. La polarizzazione è  $V_2 = 0$  V e  $V_3 = 0$  V, mentre la frequenza è  $f = 10$  kHz.



Real part, electrode #2

Figura 4.41. Parte reale del campo di impedenza scalare dell'elettrodo 2 per le lacune nel caso del due-porte resistivo. La polarizzazione è  $V_2 = 0$  V e  $V_3 = 0$  V, mentre la frequenza è  $f = 10$  kHz.



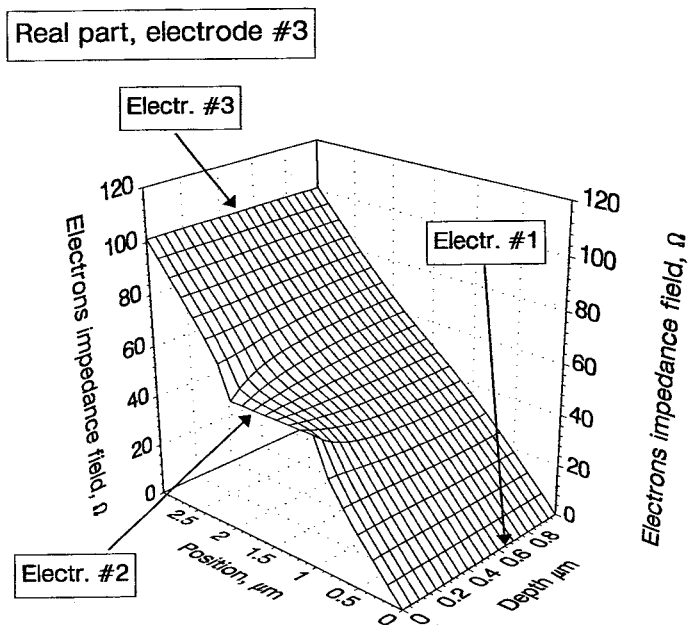


Figura 4.42. Parte reale del campo di impedenza scalare dell'elettrodo 3 per gli elettroni nel caso del due-porte resistivo. La polarizzazione è  $V_2 = 0$  V e  $V_3 = 0$  V, mentre la frequenza è  $f = 10$  kHz.

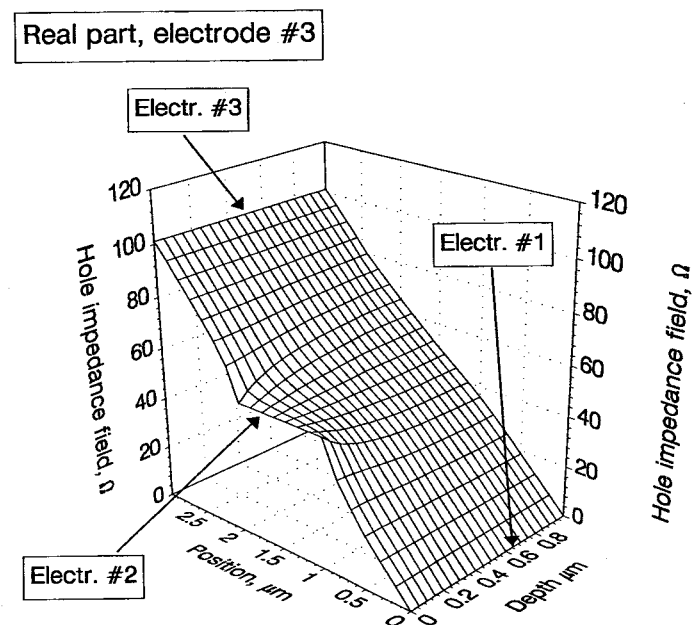
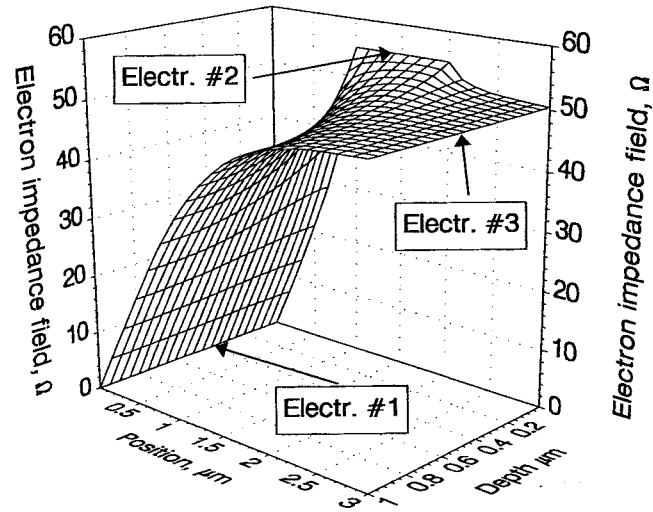
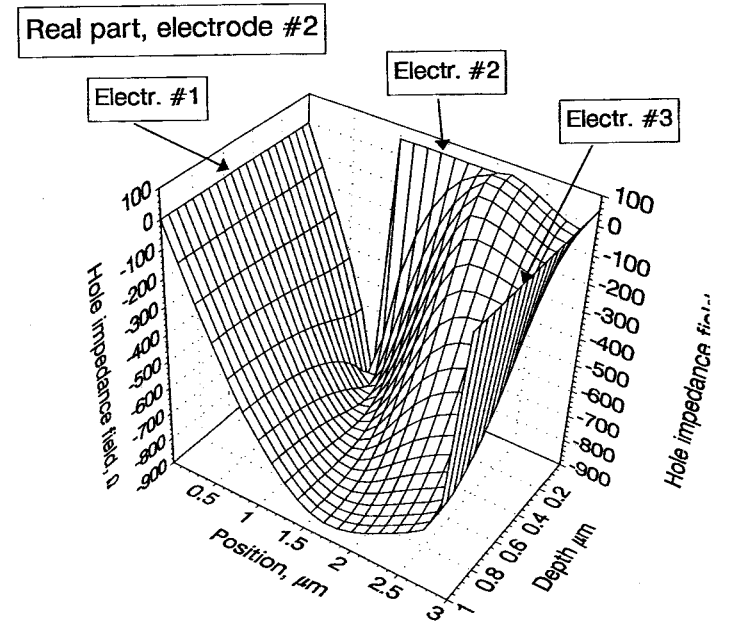


Figura 4.43. Parte reale del campo di impedenza scalare dell'elettrodo 3 per le lacune nel caso del due-porte resistivo. La polarizzazione è  $V_2 = 0$  V e  $V_3 = 0$  V, mentre la frequenza è  $f = 10$  kHz.



Real part, electrode #2

Figura 4.44. Parte reale del campo di impedenza scalare dell'elettrodo 2 per gli elettroni nel caso del due-porte resistivo. La polarizzazione è  $V_2 = 0,5$  V e  $V_3 = 1$  V, mentre la frequenza è  $f = 10$  kHz.



Real part, electrode #2

Figura 4.45. Parte reale del campo di impedenza scalare dell'elettrodo 2 per le lacune nel caso del due-porte resistivo. La polarizzazione è  $V_2 = 0,5$  V e  $V_3 = 1$  V, mentre la frequenza è  $f = 10$  kHz.

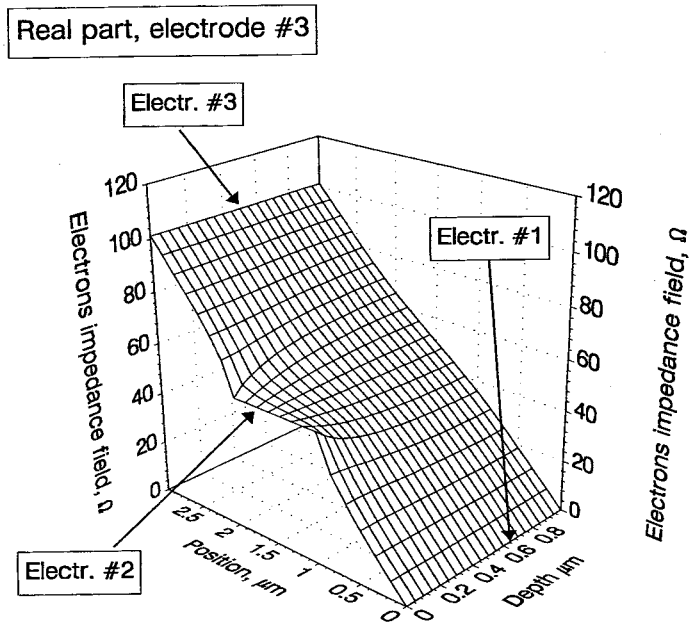


Figura 4.46. Parte reale del campo di impedenza scalare dell'elettrodo 3 per gli elettroni nel caso del due-porte resistivo. La polarizzazione è  $V_2 = 0,5$  V e  $V_3 = 1$  V, mentre la frequenza è  $f = 10$  kHz.

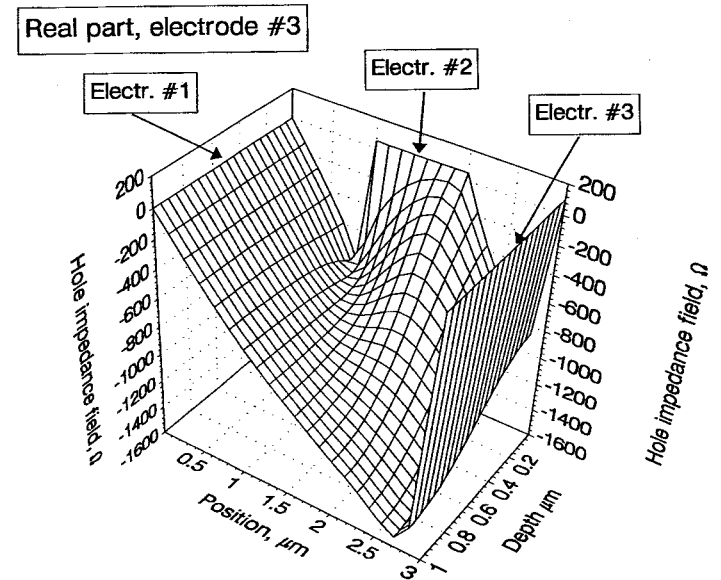


Figura 4.47. Parte reale del campo di impedenza scalare dell'elettrodo 3 per le lacune nel caso del due-porte resistivo. La polarizzazione è  $V_2 = 0,5$  V e  $V_3 = 1$  V, mentre la frequenza è  $f = 10$  kHz.

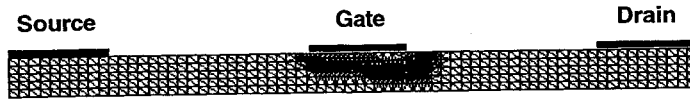


Figura 4.48. Grigliato utilizzato nell'analisi del MESFET al silicio.

## 4.7 II MESFET

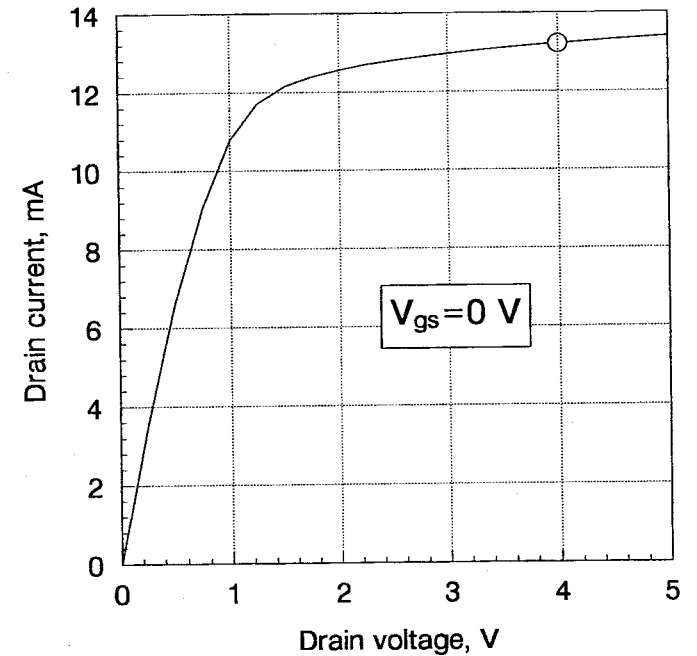
L'ultimo esempio di applicazione del modello di rumore è relativo alla simulazione di un MESFET epitassiale in silicio avente una lunghezza di gate di  $0,5 \mu\text{m}$  e una larghezza di  $100 \mu\text{m}$ . La distanza tra source e gate e tra drain e source è pari a  $1 \mu\text{m}$ , mentre tutti i contatti hanno una lunghezza di  $0,5 \mu\text{m}$ . Lo strato epitassiale ha uno spessore di  $0,2 \mu\text{m}$  ed è uniformemente drogato di tipo  $n$  con una concentrazione  $N_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ . Il contatto di gate ha una funzione lavoro di  $4,8 \text{ eV}$ .

Il grigliato usato nella simulazione è rappresentato in Fig. 4.48, mentre la Fig. 4.49 contiene la caratteristica di uscita statica per  $V_{gs} = 0 \text{ V}$ . Vista l'assenza di drogaggi di tipo  $p$ , si è svolta una simulazione monopolare per i soli elettroni, la cui relazione velocità-campo elettrico è stata approssimata dal modello di Caughey e Thomas [69]:

$$\mu(\underline{E}) = \mu_0 \left\{ 1 + \left[ \frac{\mu_0 E}{v_{\text{sat}}} \right]^\gamma \right\}^{-1/\gamma}, \quad (4.10)$$

dove  $\mu_0$  è la mobilità di basso campo, assunta pari a  $1390 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ,  $\underline{E}$  è il campo elettrico,  $v_{\text{sat}}$  è la velocità di saturazione degli elettroni, pari a  $1,035 \times 10^7 \text{ cm/s}$ , e  $\gamma$  è un parametro adimensionato assunto pari a 2.

L'analisi di rumore è stata condotta, alla frequenza di  $1 \text{ GHz}$ , per una tensione di polarizzazione di  $0 \text{ V}$  sul gate e una  $V_{ds} = 4 \text{ V}$ , in modo da far lavorare il MESFET nella regione saturata della caratteristica di uscita (cerchio rappresentato nella Fig. 4.49). La parte reale del campo di impedenza scalare di drain è rappresentata nella Fig. 4.50, mentre la parte immaginaria è contenuta nella Fig. 4.51. La corrispondente sorgente locale di rumore di drain (Fig. 4.52), è localizzata nella regione non svuotata del canale sotto il contatto di gate. Tutti questi risultati coincidono con quelli ottenuti con la tecnica aggiunta [54].

Figura 4.49. Caratteristica statica di uscita del MESFET in silicio. La polarizzazione di gate vale  $V_{gs} = 0 \text{ V}$ , mentre il cerchio identifica il punto di funzionamento per cui è stata condotta l'analisi di rumore.

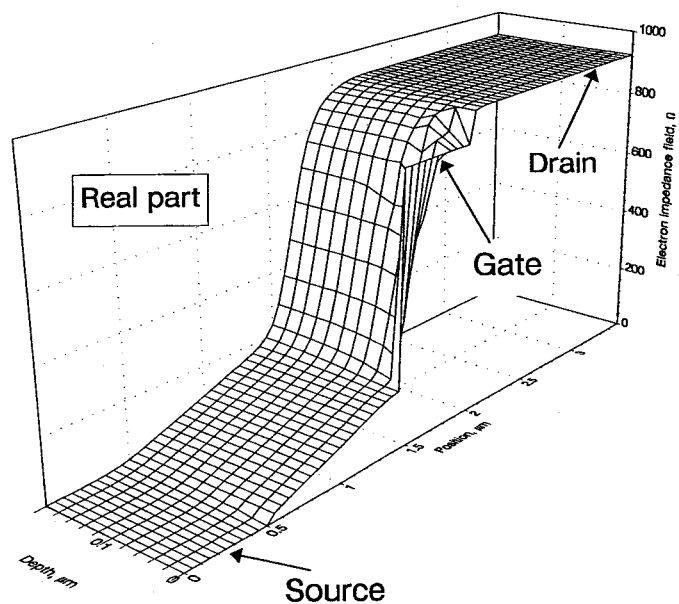


Figura 4.50. Parte reale del campo di impedenza scalare di drain per gli elettroni nel caso del MESFET. La polarizzazione è  $V_{gs} = 0$  V e  $V_{ds} = 4$  V, mentre la frequenza è  $f = 1$  GHz.

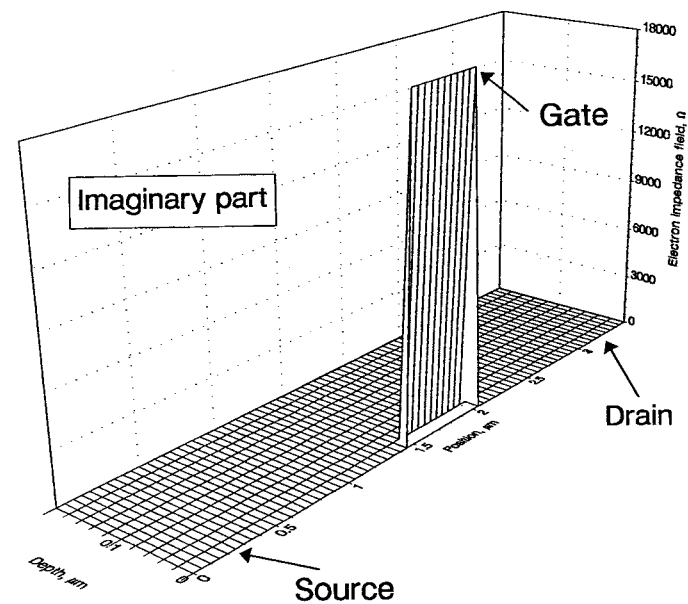


Figura 4.51. Parte immaginaria del campo di impedenza scalare di drain per gli elettroni nel caso del MESFET. La polarizzazione è  $V_{gs} = 0$  V e  $V_{ds} = 4$  V, mentre la frequenza è  $f = 1$  GHz.

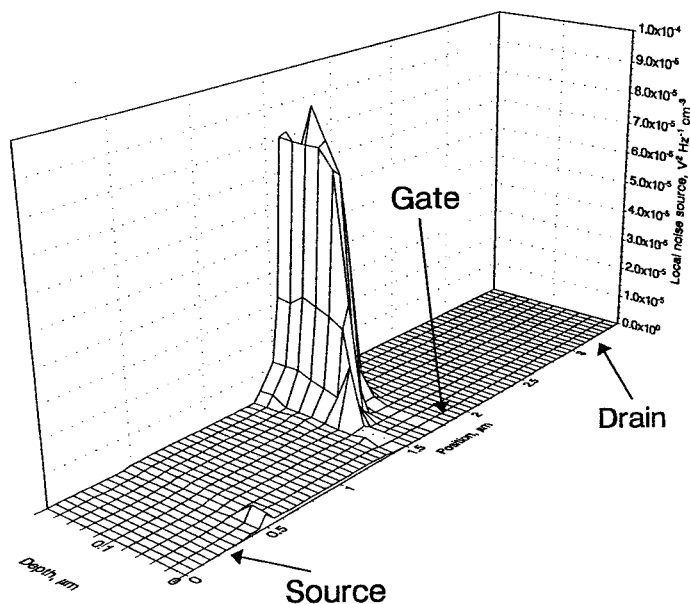


Figura 4.52. Sorgente locale di rumore di drain per gli elettroni nel caso del MESFET. La polarizzazione è  $V_{gs} = 0$  V e  $V_{ds} = 4$  V, mentre la frequenza è  $f = 1$  GHz.

## 4.8 Conclusione

In questo lavoro, si è introdotta una nuova metodologia numerica per la valutazione efficiente del campo di impedenza scalare nell'ambito di modelli bipolari basati sulla soluzione di equazioni differenziali a derivate parziali. Per la prima volta, questo modello fisico è stato implementato per dispositivi di struttura arbitraria e per modelli a più di un portatore. Il metodo numerico, inoltre, può essere facilmente esteso al caso di modelli di trasporto non stazionario.

L'analisi dei risultati condotta nelle sezioni precedenti costituisce una convalida del modello di rumore implementato nel programma di simulazione "general purpose" PADRE per il modello di trasporto drift-diffusion. Infatti, i risultati relativi a semplici strutture sono in accordo con le previsioni teoriche, sia per quanto riguarda il caso resistivo che per la simulazione di diodi a giunzione  $pn$  1D e 2D. Inoltre, sia i risultati della simulazione di strutture complesse, come nel caso del MESFET in silicio, che i confronti con altri metodi di analisi, come nel caso del diodo  $p^+pp^+$ , sono in accordo con i risultati indipendentemente ottenuti con differenti metodologie di calcolo.

## Appendice A

### Richiami di teoria delle probabilità

#### A.1 Variabili e processi casuali

Una *variabile casuale*  $x$  è un oggetto matematico caratterizzato da due proprietà [2]:

- l'insieme dei possibili valori che  $x$  può assumere;
- le sue proprietà statistiche<sup>1</sup>, come la *distribuzione cumulativa di probabilità*  $F(x_0)$  o la *densità di probabilità*  $f(x)$ . Per definizione,  $F(x_0)$  è la probabilità che la variabile casuale  $x$  assuma un valore minore o uguale a  $x_0$ , mentre  $f(x)$  ne è la derivata prima.

Nel seguito si considereranno solo variabili casuali *continue*, cioè tali da prendere valori in un insieme non numerabile.

Un *processo casuale*  $x(t)$  è una variabile casuale che dipende dal tempo. Ciò significa che  $x(t)$  può assumere valori, secondo una certa distribuzione di probabilità, in un insieme di *funzioni* del tempo  $\{x_\alpha(t), x_\beta(t), x_\gamma(t), \dots\}$ , dette *realizzazioni* del processo casuale  $x(t)$  (Fig. A.1). È anche possibile definire processi casuali dipendenti da parametri indipendenti dal tempo, come la posizione  $\underline{r}$ .

<sup>1</sup>Per una definizione rigorosa, si veda [30].

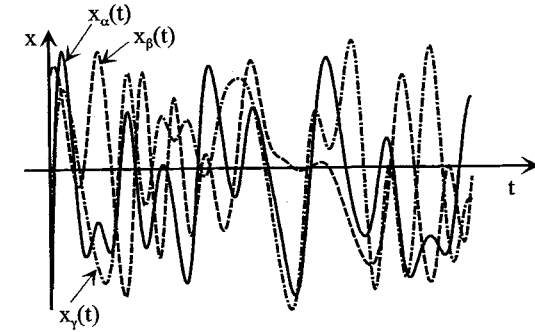


Figura A.1. Realizzazioni di un processo casuale.

##### A.1.1 Valori medi

Su un processo casuale  $x(t)$  è possibile definire due tipi di medie:

- la *media di insieme*, pari al valore medio della *variabile casuale*  $x(t)$ , dove  $t$  è fissato. Se  $E\{\cdot\}$  è il funzionale che rappresenta il valore medio di una variabile casuale, si ha:

$$\overline{x(t)} = E\{x(t)\}. \quad (\text{A.1})$$

In generale, la media di insieme è una funzione del tempo.

- la *media temporale*, che è una variabile casuale definita su ogni realizzazione del processo casuale:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt. \quad (\text{A.2})$$

Naturalmente, la variabile casuale  $\langle x(t) \rangle$  assume valori nell'insieme  $\{\langle x_\alpha \rangle, \langle x_\beta \rangle, \langle x_\gamma \rangle, \dots\}$ , che ha la stessa cardinalità del dominio del processo casuale stesso.

##### A.1.2 Funzioni di correlazione

Un parametro statistico di estrema importanza nella caratterizzazione di un processo casuale è la *funzione di autocorrelazione*  $R_{xx}(t_1, t_2)$ , definita da:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)x^*(t_2)} \quad (\text{A.3})$$

dove \* indica il complesso coniugato. La definizione (A.3) può essere generalizzata nella *funzione di mutua correlazione*  $R_{xy}(t_1, t_2)$ , tra due processi casuali  $x(t)$  e  $y(t)$ , secondo:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)y^*(t_2)} \quad (\text{A.4})$$

Tra tutti i processi casuali, particolarmente importanti sono i processi *stazionari*. Da un punto di vista intuitivo, un processo casuale è stazionario se le sue proprietà statistiche non dipendono dal tempo, mentre da un punto di vista rigoroso si possono dare molte definizioni di stazionarietà [30]. Per gli scopi dell'analisi di rumore, comunque, è sufficiente la *stazionarietà in senso lato*, definita dalle due condizioni:

- la media di insieme di  $x(t)$  non dipende dal tempo
- la funzione di autocorrelazione non dipende da  $t_1$  e  $t_2$ , ma dalla loro differenza  $\tau = t_2 - t_1$

Due processi casuali  $x(t)$  e  $y(t)$  sono *stazionari misti* in senso lato se:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(\tau) \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (\text{A.5})$$

Un processo casuale è detto *ergodico* se la media di insieme è uguale alla media temporale di ogni sua realizzazione. Evidentemente un processo ergodico ha media d'insieme indipendente dal tempo, e ciò suggerisce l'esistenza di processi ergodici stazionari. Nella teoria del rumore si considerano esclusivamente processi ergodici stazionari, per i quali le definizioni di media temporale e di insieme conducono allo stesso risultato:

$$\bar{x} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad (\text{A.6})$$

mentre la funzione di autocorrelazione può essere espressa tramite la media temporale:

$$R_{xx}(\tau) = \overline{x(t)x^*(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t+\tau) dt. \quad (\text{A.7})$$

Nel caso di due processi stazionari misti e ergodici, infine, la funzione di mutua correlazione assume la forma:

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y^*(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t+\tau) dt. \quad (\text{A.8})$$

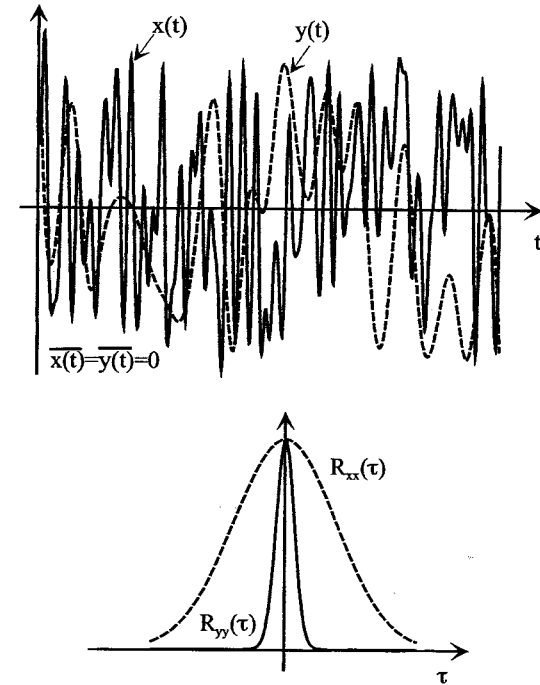


Figura A.2. Significato fisico della funzione di autocorrelazione.

Nel caso stazionario e ergodico la funzione di autocorrelazione ammette una semplice interpretazione fisica, basata sulla definizione in termini di media temporale. Infatti  $R_{xx}(\tau)$  è una misura della *correlazione* esistente tra le due variabili casuali  $x(t)$  e  $x(t+\tau)$ : se il processo casuale, ovvero tutte le sue realizzazioni, varia molto rapidamente rispetto a  $\tau$ , le due variabili casuali saranno pressoché scorrelate, e quindi  $R_{xx}(\tau) \approx 0$ . Viceversa, se la variazione è lenta rispetto a  $\tau$ , la funzione di autocorrelazione sarà grande (Fig. A.2).

Un processo casuale per cui  $x(t)$  e  $x(t+\tau)$  siano completamente scorrelate  $\forall \tau \neq 0$  è detto *rumore bianco*. In questo caso, si può dimostrare che  $R_{xx}(\tau)$  è proporzionale a una delta di Dirac (Fig. A.3).



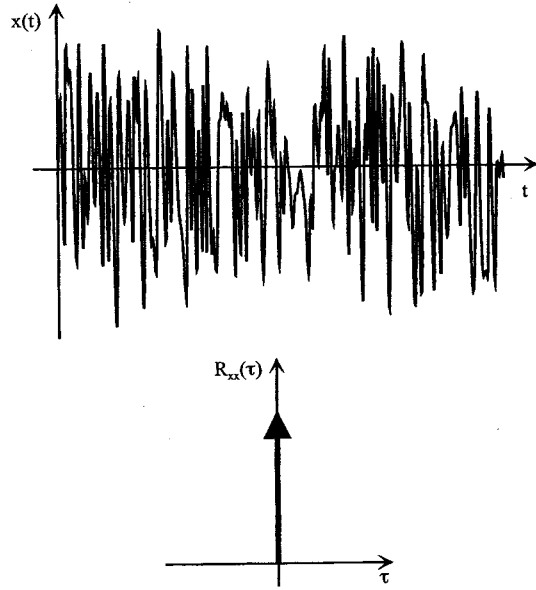


Figura A.3. Funzione di autocorrelazione di un processo bianco.

### A.1.3 Spettri di potenza e correlazione

Lo *spettro di potenza*  $\hat{S}_{xx}(\omega)$  di un processo casuale stazionario  $x(t)$  è la trasformata di Fourier della sua funzione di autocorrelazione:

$$\hat{S}_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau, \quad (\text{A.9})$$

dove l'integrale deve essere inteso in senso generalizzato.

In modo analogo si definisce lo *spettro di mutua correlazione* per due processi casuali stazionari misti:

$$\hat{S}_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{A.10})$$

Se  $x(t)$  è un processo stazionario, la funzione di autocorrelazione è pari in  $\tau$  e quindi lo spettro di potenza è pari in  $\omega$ . Per questo motivo nella teoria del

rumore si usano, normalmente, gli spettri di potenza *unilaterali*, cioè definiti per le sole pulsazioni positive:

$$S_{xx}(\omega) = 2\hat{S}_{xx}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \quad (\text{A.11})$$

con un'estensione ovvia agli spettri di mutua correlazione:

$$S_{xy}(\omega) = 2\hat{S}_{xy}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{A.12})$$

Per un processo stazionario e ergodico si ha, infine:

$$R_{xx}(0) = \langle x(t)x^*(t) \rangle = \langle |x(t)|^2 \rangle = \overline{|x|^2} \quad (\text{A.13})$$

dove la media quadratica è legata allo spettro di potenza tramite:

$$\overline{|x|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_{xx}(\omega) d\omega = \int_0^{+\infty} S_{xx}(f) df. \quad (\text{A.14})$$

## A.2 Processi di Poisson

Di notevole importanza nell'analisi delle sorgenti microscopiche di rumore sono i *processi di Poisson*. Un esempio di situazione fisica in cui questi intervengono è quello di un oggetto che emetta particelle in istanti casuali, a loro volta raccolte da un collettore. Se  $N(t)$  è il numero di particelle arrivate all'istante  $t$ , questo è un processo casuale poissoniano le cui realizzazioni sono funzioni a scala del tipo di quella rappresentata in Fig. A.4.

Il processo di Poisson non può essere stazionario, infatti la sua media di insieme cresce con il tempo, e quindi si preferisce fare riferimento alla sua derivata temporale  $x(t) = dN(t)/dt$ . Questa è un processo stazionario, detto degli *incrementi di Poisson*, una cui realizzazione è un treno di distribuzioni impulsive centrate negli istanti di arrivo delle particelle sul collettore (Fig. A.5).

La media temporale di  $x(t)$  è il numero medio  $\lambda$  di particelle raccolte nell'unità di tempo:

$$\bar{x} = \lambda \quad (\text{A.15})$$

mentre la valutazione della sua funzione di autocorrelazione è alquanto delicata. Si può dimostrare [30] che:

$$R_{xx}(\tau) = \lambda^2 + \lambda\delta(\tau). \quad (\text{A.16})$$

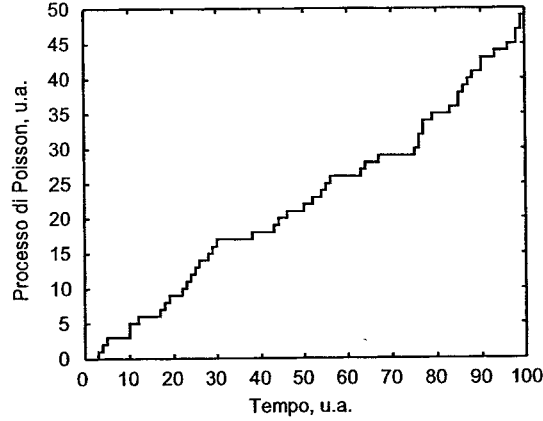


Figura A.4. Realizzazione di un processo di Poisson.

Di notevole interesse nella teoria del rumore è il processo costituito dalle fluttuazioni rispetto al valore medio del processo degli incrementi di Poisson:

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x} = x(t) - \lambda. \quad (\text{A.17})$$

La funzione di autocorrelazione di  $\delta x(t)$  vale:

$$R_{\delta x \delta x}(\tau) = R_{xx}(\tau) - \lambda^2 = \lambda \delta(\tau) \quad (\text{A.18})$$

e quindi si tratta di un processo bianco con spettro di potenza direttamente proporzionale al valore medio di  $x(t)$ .

Le fluttuazioni rappresentabili come processi degli incrementi di Poisson sono dette *rumore shot*, che è a sua volta caratterizzato da uno spettro pari al valor medio della grandezza che fluttua.

### A.3 Processi casuali e sistemi lineari

Verranno analizzate le trasformazioni subite dalle proprietà statistiche di processi casuali filtrati da sistemi lineari descritti dalle relative funzioni di trasferimento, a partire dal caso dei sistemi ingresso-uscita.

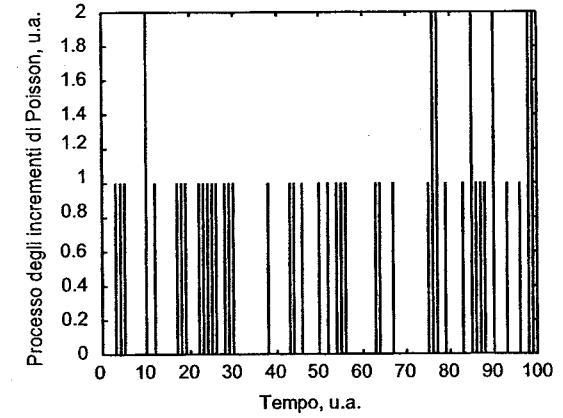


Figura A.5. Realizzazione di un processo degli incrementi di Poisson.

#### A.3.1 Sistemi ingresso-uscita

Un sistema ingresso-uscita è caratterizzato da una funzione di trasferimento scalare  $H(\omega)$ , trasformata di Fourier della risposta all'impulso  $h(t)$ .

Se  $x(t)$  e  $y(t)$  sono, rispettivamente, i processi casuali di ingresso e uscita del sistema lineare, i loro spettri di potenza sono legati da [30]:

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega). \quad (\text{A.19})$$

Una dimostrazione euristica della (A.19) si basa sull'ipotesi di poter definire la trasformata di Fourier di un processo casuale, cosa che richiede in realtà una notevole attenzione [30]. Dalla teoria dei sistemi lineari segue:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega), \quad (\text{A.20})$$

mentre si può dimostrare [30]:

$$S_{xx}(\omega) = E\{X(\omega)X^*(\omega)\} \quad (\text{A.21})$$

per cui, grazie alla (A.20), segue proprio la (A.19):

$$S_{yy}(\omega) = E\{H(\omega)X(\omega)H^*(\omega)X^*(\omega)\} = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega). \quad (\text{A.22})$$

### A.3.2 Sistemi a due ingressi e una uscita

Un sistema lineare a due ingressi e una uscita può essere rappresentato decomponendo l'uscita complessiva  $z(t)$  nella somma delle due uscite parziali  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  relative alle due trasformazioni lineari  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$  introdotte sugli ingressi  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ :

$$z(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad (\text{A.23})$$

$$y_i(t) = \mathcal{T}_i\{x_i(t)\} \quad i = 1, 2. \quad (\text{A.24})$$

Dalla (A.23) segue, per la linearità della media:

$$R_{zz}(\tau) = R_{y_1 y_1}(\tau) + R_{y_1 y_2}(\tau) + R_{y_2 y_1}(\tau) + R_{y_2 y_2}(\tau) \quad (\text{A.25})$$

mentre si può dimostrare che [30]:

$$S_{y_1 y_2}(\omega) = H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{x_1 x_2}(\omega), \quad (\text{A.26})$$

essendo  $H_1(\omega)$  e  $H_2(\omega)$  le funzioni di trasferimento dei due sistemi lineari precedentemente definiti.

Per le (A.22, A.26) si ha:

$$S_{y_1 y_1}(\omega) = |H_1(\omega)|^2 S_{x_1 x_1}(\omega), \quad (\text{A.27})$$

$$S_{y_1 y_2}(\omega) = H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{x_1 x_2}(\omega), \quad (\text{A.28})$$

$$S_{y_2 y_1}(\omega) = H_2(\omega) H_1^*(\omega) S_{x_2 x_1}(\omega), \quad (\text{A.29})$$

$$S_{y_2 y_2}(\omega) = |H_2(\omega)|^2 S_{x_2 x_2}(\omega) \quad (\text{A.30})$$

e quindi la (A.25) conduce a:

$$S_{zz}(\omega) = |H_1(\omega)|^2 S_{x_1 x_1}(\omega) + H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{x_1 x_2}(\omega) + H_2(\omega) H_1^*(\omega) S_{x_2 x_1}(\omega) + |H_2(\omega)|^2 S_{x_2 x_2}(\omega). \quad (\text{A.31})$$

La (A.31) può essere scritta in forma compatta introducendo i vettori (dove T indica "trasposto"):

$$\underline{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}^T, \quad (\text{A.32})$$

$$\underline{H}(\omega) = \{H_1(\omega), H_2(\omega)\} \quad (\text{A.33})$$

e la matrice spettrale di correlazione  $\underline{S}_{\underline{x}\underline{x}}(\omega)$ :

$$\underline{S}_{\underline{x}\underline{x}}(\omega) = \begin{pmatrix} S_{x_1 x_1}(\omega) & S_{x_1 x_2}(\omega) \\ S_{x_2 x_1}(\omega) & S_{x_2 x_2}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

Infatti si ha:

$$Z(\omega) = \underline{H}(\omega) \cdot \underline{X}(\omega), \quad (\text{A.35})$$

e lo spettro di potenza di  $z(t)$  vale:

$$S_{zz}(\omega) = \underline{H}(\omega) \cdot \underline{S}_{\underline{x}\underline{x}}(\omega) \cdot \underline{H}^\dagger(\omega) \quad (\text{A.36})$$

dove  $\dagger$  indica "trasposto coniugato".

### A.3.3 Sistemi a più ingressi e due uscite

Si considerino due insiemi  $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$  e  $\{y_i(t)\}_{i=1}^n$ , costituiti da  $n$  processi casuali, inviati ai  $2n$  ingressi di un sistema lineare a due uscite,  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$ . Tale sistema lineare sia definito, nel dominio spettrale, da:

$$Z_1(\omega) = \sum_{j=1}^n H_{1x_j}(\omega) X_j(\omega) + \sum_{j=1}^n H_{1y_j}(\omega) Y_j(\omega), \quad (\text{A.37})$$

$$Z_2(\omega) = \sum_{k=1}^n H_{2x_k}(\omega) X_k(\omega) + \sum_{k=1}^n H_{2y_k}(\omega) Y_k(\omega). \quad (\text{A.38})$$

Usando la (A.26), è facile provare che:

$$S_{z_1 z_2}(\omega) = \sum_{j,k=1}^n \{ H_{1x_j}(\omega) H_{2x_k}^*(\omega) S_{x_j x_k}(\omega) + H_{1x_j}(\omega) H_{2y_k}^*(\omega) S_{x_j y_k}(\omega) + H_{1y_j}(\omega) H_{2x_k}^*(\omega) S_{y_j x_k}(\omega) + H_{1y_j}(\omega) H_{2y_k}^*(\omega) S_{y_j y_k}(\omega) \} \quad (\text{A.39})$$

mentre introducendo:

- i vettori dei processi di ingresso e uscita

$$\underline{z} = \{z_1, z_2\}^T, \quad (\text{A.40})$$

$$\underline{r}_\alpha = \{x_\alpha, y_\alpha\}^T \quad (\text{A.41})$$

- la matrice di trasferimento

$$\underline{H}_i(\omega) = \begin{pmatrix} H_{1x_i}(\omega) & H_{1y_i}(\omega) \\ H_{2x_i}(\omega) & H_{2y_i}(\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{A.42})$$

- le matrici di correlazione

$$\underline{\underline{S}}_{zz}(\omega) = \begin{pmatrix} S_{z_1 z_1}(\omega) & S_{z_1 z_2}(\omega) \\ S_{z_2 z_1}(\omega) & S_{z_2 z_2}(\omega) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.43})$$

$$\underline{\underline{S}}_{r_j r_k}(\omega) = \begin{pmatrix} S_{x_j x_k}(\omega) & S_{x_j y_k}(\omega) \\ S_{y_j x_k}(\omega) & S_{y_j y_k}(\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

la matrice di correlazione del vettore di uscita si riscrive nella forma compatta:

$$\underline{\underline{S}}_{zz}(\omega) = \sum_{j,k=1}^n \underline{\underline{H}}_j(\omega) \cdot \underline{\underline{S}}_{r_j r_k}(\omega) \cdot \underline{\underline{H}}_k^\dagger(\omega), \quad (\text{A.45})$$

che continua a essere valida anche se si passa a due insiemi continui di processi di ingresso (sistema lineare a ingressi distribuiti), pur di sostituire la doppia sommatoria con un integrale doppio.

Siano  $\xi \in \Xi$  e  $v \in \Upsilon$  gli indici continui, eventualmente multidimensionali (come nel caso di processi casuali che dipendono dalla posizione), che identificano i vettori di ingresso  $r(\xi, t) = (x(\xi, t), y(\xi, t))$  e  $r(v, t) = (x(v, t), y(v, t))$ . La definizione del sistema lineare diviene:

$$Z_1(\omega) = \int_{\Xi} H_{1x}(\xi, \omega) X(\xi, \omega) d\xi + \int_{\Xi} H_{1y}(\xi, \omega) Y(\xi, \omega) d\xi, \quad (\text{A.46})$$

$$Z_2(\omega) = \int_{\Upsilon} H_{2x}(v, \omega) X(v, \omega) dv + \int_{\Upsilon} H_{2y}(v, \omega) Y(v, \omega) dv \quad (\text{A.47})$$

mentre si sostituiscono le (A.42, A.44) con:

$$\underline{\underline{H}}(\phi, \omega) = \begin{pmatrix} H_{1x}(\phi, \omega) & H_{1y}(\phi, \omega) \\ H_{2x}(\phi, \omega) & H_{2y}(\phi, \omega) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.48})$$

$$\underline{\underline{S}}_{r(\xi)r(v)}(\xi, v, \omega) = \begin{pmatrix} S_{xx}(\xi, v, \omega) & S_{xy}(\xi, v, \omega) \\ S_{yx}(\xi, v, \omega) & S_{yy}(\xi, v, \omega) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.49})$$

Si trova, allora:

$$\underline{\underline{S}}_{zz}(\omega) = \int_{\Xi} \int_{\Upsilon} \underline{\underline{H}}(\xi, \omega) \cdot \underline{\underline{S}}_{r(\xi)r(v)}(\xi, v, \omega) \cdot \underline{\underline{H}}^\dagger(v, \omega) dv d\xi. \quad (\text{A.50})$$

## Bibliografia

- [1] C. M. van Vliet, "Macroscopic and microscopic methods for noise in devices", *IEEE Trans. El. Dev.*, Vol. ED-41, No. 11, pagg. 1902-1915, 1994.
- [2] N. G. van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry*, Amsterdam: North-Holland, 1981.
- [3] K. M. van Vliet, "Markov approach to density fluctuations due to transport and scattering. I. Mathematical formalism", *J. Math. Phys.*, Vol. 12, No. 9, pagg. 1981-1998, 1971.
- [4] K. M. van Vliet, "Markov approach to density fluctuations due to transport and scattering. II. Applications", *J. Math. Phys.*, Vol. 12, No. 9, pagg. 1998-2012, 1971.
- [5] M. C. Wang e G. E. Uhlenbeck, "On the theory of the brownian motion", *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 17, pagg. 323-342, 1945.
- [6] R. E. Burgess, "Fluctuations in the number of charge carriers in a semiconductor", *Physica*, Vol. 20, pagg. 1007-1010, 1954.
- [7] K. M. van Vliet e J. R. Fasset, "Fluctuations due to electronic transitions and transport in solids", in *Fluctuations phenomena in solids*, R. E. Burgess ed., New York: Academic Press, 1965.
- [8] S. Chandrasekar, "Stochastic problems in physics and astronomy", *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 15, No. 1, pagg. 1-89, 1943.
- [9] G. E. Uhlenbeck e L. S. Ornstein, "On the theory of the brownian motion", *Phys. Rev.*, Vol. 36, pagg. 823-841, 1930.

- [10] J. P. Nougier, "Fluctuations and noise of hot carriers in semiconductor materials and devices", *IEEE Trans. El. Dev.*, Vol. ED-41, No. 11, pagg. 2034-2049, 1994.
- [11] K. M. van Vliet, "MacDonald's theorem and Milatz's theorem for multivariate stochastic processes", *Physica*, Vol. 86a, pagg. 130-136, 1977.
- [12] R. Fauquembergue, J. Zimmermann, A. Kaszynski, E. Constant e G. Microondes, "Diffusion and the power spectral density and correlation function of velocity fluctuation for electrons in Si and GaAs by Monte Carlo methods", *J. Appl. Phys.*, Vol. 51, No. 2, pagg. 1065-1071, 1980.
- [13] J. P. Nougier e M. Rolland, *J. Appl. Phys.*, Vol. 48, pag. 1638, 1977.
- [14] D. L. Scharfetter e H. K. Gummel, "Large signal analysis of silicon Read diode oscillator", *IEEE Trans. El. Dev.*, Vol. ED-16, No. 1, pagg. 64-77, 1969.
- [15] G. Ghione, F. Bonani e M. Pirola, "High-field diffusivity and noise spectra in GaAs MESFET's", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 27, pagg. 365-375, 1994.
- [16] A. van der Ziel, "Unified presentation of  $1/f$  noise in electronic devices - fundamental  $1/f$  noise sources", *Proc. IEEE*, Vol. 76, pagg. 233-258, 1988.
- [17] F. N. Hooge, " $1/f$  noise is no surface effect", *Phys. Lett.*, Vol. A-29, pag. 139, 1969.
- [18] F. N. Hooge, " $1/f$  noise sources", *IEEE Trans. El. Dev.*, Vol. ED-41, No. 11, pagg. 1926-1935, 1994.
- [19] L. K. J. Vandamme, "Is the  $1/f$  noise parameter  $\alpha$  a constant?", *Proc. Int. Conf. on Noise in Phys. Syst. and  $1/f$  Fluctuations*, M. Savelli, G. Lecoy e J.-P. Nougier ed., Amsterdam: North-Holland, pagg. 183-192, 1983.
- [20] L. K. J. Vandamme, X. Li e D. Rigaud, " $1/f$  noise in MOS devices, mobility or number fluctuations?", *IEEE Trans. El. Dev.*, Vol. ED-41, No. 11, pagg. 1936-1945, 1994.

- [21] A. L. McWhorter, "1/f noise and related surface effects in germanium", *Lincoln Lab Rep. 80*, Boston, 1955.
- [22] M. Kogan e K. E. Nagaev, "On the low-frequency current 1/f noise in metals", *Solid State Commun.*, Vol. 49, pag. 387, 1984.
- [23] N. Giordano, "Defect motion and low-frequency noise in disordered metals", *Rev. Solid State Science*, Vol. 3, pag. 27, 1989.
- [24] J. Pelz e J. Clarke, "Quantitative local interference model for 1/f noise in metal films", *Phys. Rev. B*, Vol. 36, pag. 4479, 1987.
- [25] P. J. Handel, "1/f noise – an infrared phenomenon", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 34, pag. 1492, 1975.
- [26] C. M. van Vliet, "A survey of results and future prospects on quantum 1/f noise and 1/f noise in general", *Solid State Electron.*, Vol. 34, pag. 1, 1991.
- [27] S. Selberherr, *Analysis and simulation of semiconductor devices*, Wien: Springer Verlag, 1984.
- [28] M. R. Pinto, *Comprehensive semiconductor device simulation for silicon ULSI*, PhD thesis, Stanford University, 1990.
- [29] V. Gruzinskis, E. Starikov, P. Shiktorov, L. Reggiani, M. Saraniti e L. Varani, "Hydrodynamic analysis of DC and AC hot-carrier transport in semiconductors", *Semicond. Sci. Technol.*, Vol. 8, pagg. 1283-1290, 1993.
- [30] A. Papoulis, *Probability, random variables and stochastic processes*, McGraw-Hill, 1965.
- [31] G. Ghione e C. U. Naldi, "Physics-based noise analysis of GaAs MESFETs: principles, models, analysis techniques", *rapporto interno del Politecnico di Torino*, 1991.
- [32] W. Shockley, J. A. Copeland e R. P. James, "The impedance field method of noise calculation in active semiconductor devices", in *Quantum Theory of Atoms, Molecules, and the Solid-State*, Per-Olov Lowdin ed., New York: Academic Press, 1966.

- [33] K. M. van Vliet, A. Friedman, R. J. J. Zijlstra, A. Gisolf e A. van der Ziel, "Noise in single injection diodes. I: A survey of methods", *J. Appl. Phys.*, Vol. 46, No. 4, pagg. 1804-1813, 1975.
- [34] J. P. Nougier, "Noise and diffusion of hot carriers", in *Physics of nonlinear transport in semiconductors*, D. K. Ferry, J. R. Barker e C. Jacoboni ed., Plenum Press, 1980.
- [35] L. Varani, "Teoria del rumore elettronico nei semiconduttori", *Tesi di Dottorato di Ricerca*, Università di Modena, 1992.
- [36] T. González, D. Pardo, L. Varani e L. Reggiani, "Monte Carlo analysis of the behavior and spatial origin of electronic noise in GaAs MESFETs", *IEEE Trans. El. Dev.*, Vol. ED-42, No. 5, pagg. 991-998, 1995.
- [37] A. Abou-Elnour e K. Schünemann, "Rigorous two-dimensional physical modeling of noise performance of sub-0.25  $\mu\text{m}$  gate-length FETs", *Proc. IEDM*, pagg. 781-784, 1995.
- [38] K. M. van Vliet, A. Friedman, R. J. J. Zijlstra, A. Gisolf e A. van der Ziel, "Noise in single injection diodes. II: Applications", *J. Appl. Phys.*, Vol. 46, No. 4, pagg. 1814-1823, 1975.
- [39] K. M. van Vliet, "General transport theory of noise in *pn* junction-like devices – I: Three-dimensional Green's function formulation", *Solid State Electron.*, Vol. 15, pagg. 1033-1053, 1972.
- [40] R. S. Muller e T. I. Kamins, *Device electronics for integrated circuits*, 2nd ed., New York: John Wiley & Sons, 1986.
- [41] M. L. Tarng e K. M. van Vliet, "General transport theory of noise in *pn* junction-like devices – II: Carrier correlations and fluctuations for high injection", *Solid State Electron.*, Vol. 15, pagg. 1055-1069, 1972.
- [42] H. S. Min, K. M. van Vliet e A. van der Ziel, "General transport theory of noise in *pn* junction-like devices – III: Junction noise in *p<sup>+</sup>-n* diodes at high injection", *Phys. Stat. Sol. (a)*, Vol. 10, pagg. 605-618, 1972.
- [43] R. A. Pucel, H. A. Haus e H. Statz, "Signal and noise properties of gallium arsenide microwave field-effect transistors", *Advances Electron. Electron Phys.*, Vol. 38, pagg. 195-265, 1974.

- [44] H. A. Haus, H. Statz e R. A. Pucel, "Noise characteristics of gallium arsenide field-effect transistors", *IEEE Trans. El. Dev.*, Vol. ED-21, pagg. 549-562, 1974.
- [45] S. M. Sze, *Physics of semiconductor devices*, 2nd ed., New York: John Wiley & Sons, 1981.
- [46] A. B. Grebene e S. H. Ghandhi, "General theory for pinched operation of the junction-gate FET", *Solid State Electron.*, Vol. 12, pagg. 573-589, 1969.
- [47] T. M. Brookes, "The noise properties of high electron mobility transistors", *IEEE Trans. El. Dev.*, Vol. ED-33, pagg. 52-57, 1986.
- [48] Y. Ando e T. Itoh, "DC, small-signal and noise modelling for two dimensional electron gas field-effect transistors based on accurate charge-control characteristics", *IEEE Trans. El. Dev.*, Vol. ED-37, pagg. 67-78, 1990.
- [49] F. Bonani, G. Ghione, C. U. Naldi, R. D. Schnell e H. J. Siweris, "HEMT short-gate noise modeling and parametric analysis of NF performance limits", *Proc. IEDM*, pagg. 581-584, 1992.
- [50] F. Bonani e G. Ghione, "Noise modelling of HEMT's", *Alta Frequenza-Focus on GaAs electronics: towards zero dimensional structures*, Vol. 5, No. 2, pagg. 28-36, 1993.
- [51] A. Cappy e W. Heinrich, "High-frequency FET noise performances: a new approach", *IEEE Trans. El. Dev.*, Vol. ED-36, pagg. 403-409, 1989.
- [52] G. Ghione, E. Bellotti e F. Filicori, "Physical noise modelling of majority-carrier devices: an adjoint network approach", *Proc. IEDM*, pagg. 351-355, 1989.
- [53] G. Ghione, "A two-dimensional approach to the noise simulation of Ga-As MESFET's", *Proc. ESSDERC*, pagg. 225-229, 1990.
- [54] G. Ghione e F. Filicori, "A computationally efficient unified approach to the numerical analysis of the sensitivity and noise of semiconductor devices", *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, Vol. CAD-12, No. 3, pagg. 425-438, 1993.

- [55] S. W. Director e R. A. Roher, "Automated network design - The frequency-domain case", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-16, pagg. 330-337, 1969.
- [56] R. A. Roher, L. Nagel, R. Meyer e L. Weber, "Computationally efficient electronic-circuit noise calculation", *IEEE J. Solid-State Circuits*, Vol. SC-6, pagg. 204-212, 1971.
- [57] P. A. Layman, *The analysis of thermal and 1/f noise in MOS devices, circuits and systems*, PhD Thesis, University of Waterloo, 1989.
- [58] F. H. Branin, "Network sensitivity and noise analysis simplified", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-20, pagg. 285-288, 1973.
- [59] V. Gružinskis, E. Starikov e P. Shiktorov, "Impedance field calculations in submicrometer structures", *Proc. 13th Int. Conf. on Noise in Phys. Syst. and 1/f Fluctuations*, V. Bareikis e R. Katilius ed., Singapore: World Scientific, pagg. 185-188, 1995.
- [60] J. P. Nougier, L. Hlou, P. Houlet, J. C. Vaissiere e L. Varani, "An alternative solution of the Boltzmann equation: the Scattered Packet Method", *Proc. 3rd Int. Work. Comput. Electronics*, S. Goodnick ed., pag. 15, 1994.
- [61] P. Houlet, "Etude du transport dans un composant unidimensionnel par la méthode des paquets répartis", PhD Thesis, Université Montpellier II, 1995.
- [62] S. E. Laux, "Techniques for small-signal analysis of semiconductor devices", *IEEE Trans. El. Dev.*, Vol. ED-32, No. 10, pagg. 2028-2037, 1985.
- [63] F. Bonani, M. R. Pinto, R. K. Smith e G. Ghione, "An efficient approach to multi-dimensional impedance field noise simulation of bipolar devices", *Proc. 13th Int. Conf. on Noise in Phys. Syst. and 1/f Fluctuations*, V. Bareikis e R. Katilius ed., Singapore: World Scientific, pagg. 379-382, 1995.
- [64] F. Bonani, G. Ghione, M. R. Pinto e R. K. Smith, "A novel implementation of noise analysis in general-purpose PDE-based semiconductor device simulators", *Proc. IEDM*, pagg. 777-780, 1995.

- [65] C. T. Sah, *Fundamentals of solid-state electronics*, Singapore: World Scientific, 1991.
- [66] W. Shockley e W. T. Read, "Statistics of the recombination of holes and electrons", *Physical Review*, Vol. 87, No. 5, pagg. 835–842, 1952.
- [67] R. N. Hall, "Electron-hole recombination in germanium", *Physical Review*, Vol. 87, No. 5, pag. 387, 1952.
- [68] A. van der Ziel, *Noise: sources, characterization, measurement*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1970.
- [69] D. M. Caughey e R. E. Thomas, "Carrier mobilities in silicon empirically related to doping and field", *Proc. IEEE*, Vol. 55, pagg. 2192–2193, 1967.